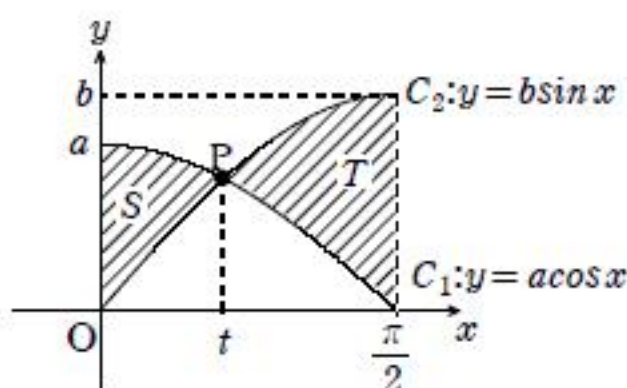




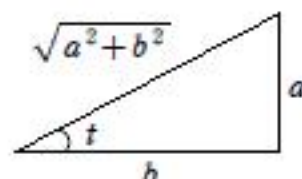
- (1) C_1 と C_2 の交点 P の x 座標が t なので,

$$a \cos t = b \sin t$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ なので,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\frac{a}{b} = \tan t$$



$$\therefore \begin{cases} \sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad S &= \int_0^t (a \cos x - b \sin x) dx \\ &= [a \sin x + b \cos x]_0^t \\ &= a \sin t + b(\cos t - 1) \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - b \quad (\because (1)) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{a^2 + b^2} - b}} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad T &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} (b \sin x - a \cos x) dx \\ &= [-b \cos x - a \sin x]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -b(-\cos t) - a(1 - \sin t) \\ &= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - a + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\because (1)) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{a^2 + b^2} - a}} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$T = 2S$ とおくと,

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a = 2(\sqrt{a^2 + b^2} - b)$$

$$2b - a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

右辺 > 0 ($\because a > 0, b > 0$) なので,

$$\text{左辺 } 2b - a > 0 \quad \text{つまり, } b > \frac{1}{2}a$$

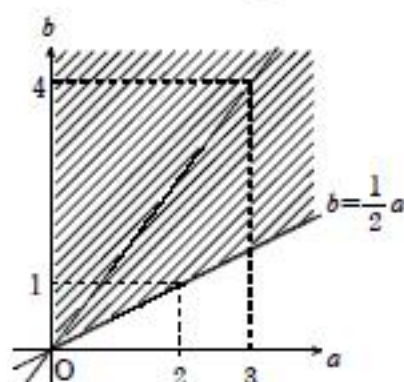
この条件のもと両辺を 2 乗すると,

$$4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + b^2$$

$$3b^2 - 4ab = 0$$

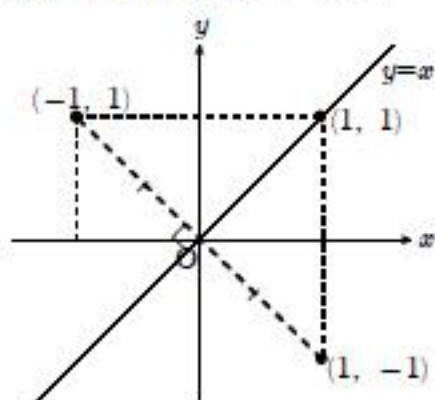
$$b(3b - 4a) = 0$$

$b > 0$ なので, $b = \frac{4}{3}a$ ($a > 0, b > 0$ で $b > \frac{1}{2}a$ を満たす)



ゆえに $b = \frac{4}{3}a$ (ただし, $a > 0, b > 0$) $\dots$ (答)

- (1)
- f
- を表す行列を
- F
- とすると,



$(1, 1)$ の f による像は $(1, 1)$ なので, $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(1, -1)$ の f による像は $(-1, 1)$ なので, $F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore F \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

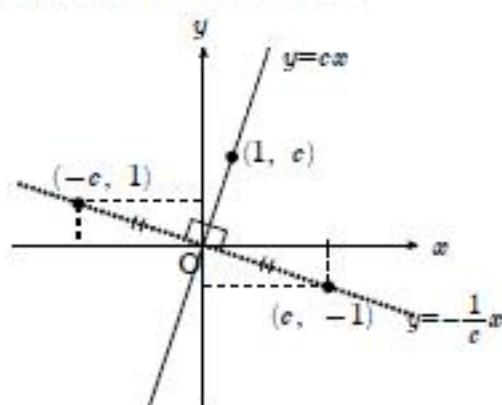
両辺に右から, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を掛けると,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

h を表す行列を H とすると,

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2)
- g
- を表す行列を
- G
- とすると,



$(1, c)$ の g による像は $(1, c)$ なので, $g \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$

$(c, -1)$ の g による像は $(c, -1)$ なので, $G \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore G \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

両辺に右から, $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-c-c^2} \begin{pmatrix} -1 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix}$ を掛けると,

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & c^2-1 \end{pmatrix}}} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3)
- $f \circ g = h$
- となるためには,

$F \cdot G = H$ より,

$$\frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & c^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{2c}{1+c^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{1-c^2}{1+c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 + 4c + 1 = 0 \quad \left| \quad c^2 = (2 - \sqrt{3})^2 \right.$$

$$c = -2 \pm \sqrt{3} \quad \left| \quad c = \pm(2 - \sqrt{3}) \right.$$

ゆえに

$$\underline{\underline{c = -2 + \sqrt{3}}} \quad \cdots (\text{答})$$

$$(1) \quad z = \frac{w-1}{w+1} \text{ より,}$$

$$z(w+1) = w-1$$

$$(z-1)w = -z-1$$

$z=1$ とすると, $0=-2$ となり, 不適.

よって,

$$w = \frac{-z-1}{z-1}$$

$$= -\frac{z+1}{z-1} \quad (\text{ただし, } z \neq 1) \quad \cdots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \therefore s+ti &= -\frac{(x+yi)+1}{(x+yi)-1} \\ &= -\frac{\{(x+1)+yi\}\{(x-1)-yi\}}{\{(x-1)+yi\}\{(x-1)-yi\}} \\ &= -\frac{(x^2+y^2-1)-2yi}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}i \end{aligned}$$

s, t, x, y は実数なので,

$$\begin{cases} s = \frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2} \\ t = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \end{cases} \quad (\text{ただし, } (x, y) \neq (1, 0)) \quad \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad 0 \leq s \leq 1 \text{ より,}$$

$$0 \leq \frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

$(x-1)^2+y^2 > 0$ なので,

$$0 \leq -x^2-y^2+1 \leq (x-1)^2+y^2$$

$$\therefore \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{ただし, } (x, y) \neq (1, 0))$$

$0 \leq t \leq 1$ より,

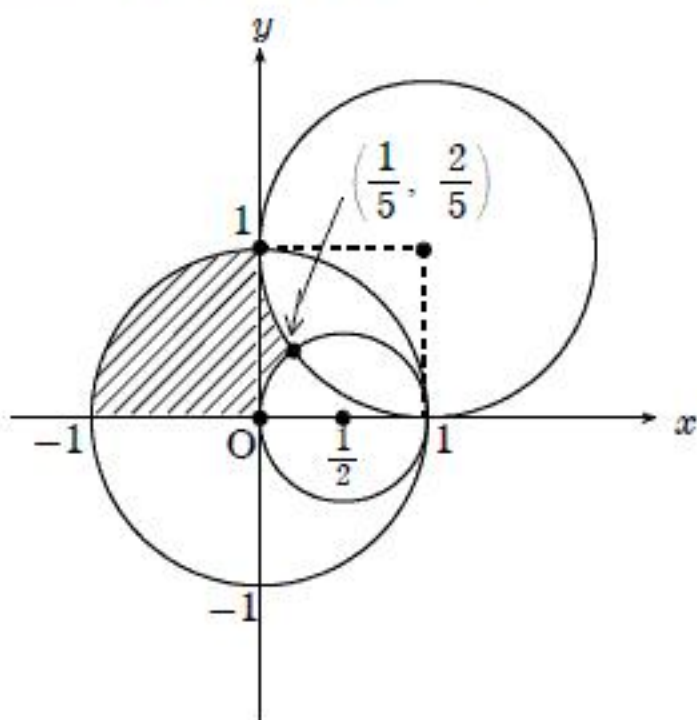
$$0 \leq \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

$(x-1)^2+y^2 > 0$ なので,

$$0 \leq 2y \leq (x-1)^2+y^2$$

$$\therefore \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1^2 \end{cases} \quad (\text{ただし, } (x, y) \neq (1, 0))$$

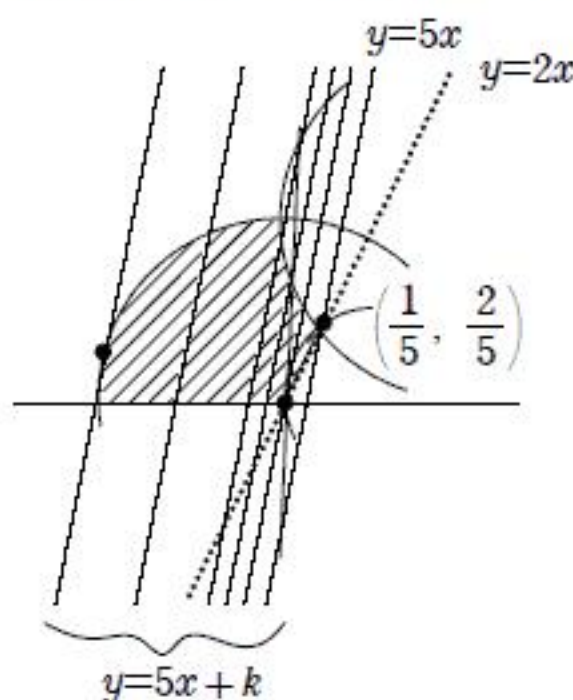
領域 D は図の斜線部 (境界線を含む)



$$(3) \quad -5x+y=k \text{ とおくと,}$$

$$y=5x+k$$

この傾き 5, y 切片 k の直線が領域 D と共有点を持つときの y 切片 k の最小値を求めるとよい.



上図より, $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ を通るとき,

$$\begin{aligned} \text{最小値} &= -5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \\ &= -\frac{3}{5} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

をとる.

- 4 2個のサイコロの同時に投げたときの出た目をそれぞれ a, b とする.

$$X = ab$$

を4で割った余りは下表のとおり.

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

よって,

$$\text{条件(i)を満たす確率は } \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\text{条件(ii)を満たす確率は } \frac{5}{36}$$

$$\text{条件(iii)を満たす確率は } \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\text{条件(iv)を満たす確率は } \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- (1) 1回投げて $P(-1, 0)$ にあるのは, (i)のときなので,

$$\text{求める確率は } \frac{5}{12} \quad \dots (\text{答})$$

- (2) 3回投げて $P(2, 1)$ にあるのは, (iii)が2回, (iv)が1回おきるときなので,

求める確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \quad \dots (\text{答})$$

- (3) 4回投げて $P(1, 1)$ にあるのは,

- (i) (i)が1回, (iii)が2回, (iv)が1回起きるとき

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{5}{81}$$

- (ii) (ii)が1回, (iii)が1回, (iv)が2回起きるとき

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot \left(\frac{5}{36}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{5}{729}$$

以上(i)(ii)より,

$$\frac{45}{729} + \frac{5}{729} = \frac{50}{729} \quad \dots (\text{答})$$

$$(1) \quad F(x) = \int_0^{2x} t f(2x-t) dt \text{ より,}$$

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

ここで, $x-t=s \iff t=x-s$ とおくと,

$$dt = -ds$$

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow x \\ \hline s & x \rightarrow 0 \end{array}$$

なので,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x}{2}\right) &= \int_x^0 (x-s) f(s) \cdot (-1) ds \\ &= \underline{\underline{\int_0^x (x-s) f(s) ds}} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad F\left(\frac{x}{2}\right) = x \int_0^x f(s) ds - \int_0^x s f(s) ds$$

$x=0$ を代入すると,

$$F(0) = 0$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{2} F'\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \cdot \int_0^x f(s) ds + x f(x) - x f(x)$$

$$\therefore F'\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \int_0^x f(s) ds$$

$x=0$ を代入すると,

$$F'(0) = 0$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{2} F''\left(\frac{x}{2}\right) = 2 f(x)$$

$$\therefore F''\left(\frac{x}{2}\right) = 4 f(x)$$

これより,

$$\underline{\underline{F''(x) = 4 f(2x)}} \quad \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ とおくと,}$$

$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$F''(x) = 6ax + 2b$$

ここで,

$$\begin{cases} F(1) = 1 \text{ より} & a + b + c + d = 1 \\ F(0) = 0 \text{ より} & d = 0 \\ F'(0) = 0 \text{ より} & c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a + b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$F''(x) = 4 f(2x)$ に $x = \frac{1}{2}$ を代入すると,

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 f(1)$$

$$6a \cdot \frac{1}{2} + 2b = 4 \cdot 1 \quad (\because f(1) = 1)$$

$$\therefore 3a + 2b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて,

$$a = 2, \quad b = -1$$

よって,

$$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 - x^2}} \quad \cdots (\text{答})$$

また, $F''(x) = 4 f(2x)$ より,

$$f(x) = \frac{1}{4} F''\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} (3ax + 2b)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}} \quad \cdots (\text{答})$$