

1

$$(1) \begin{cases} C_1: y = -x^2 + \frac{3}{2} \\ C_2: y = (x-a)^2 + a \end{cases} \quad \text{から } y \text{ を消去して連立すると}$$

$$\begin{aligned} -x^2 + \frac{3}{2} &= (x-a)^2 + a \\ 2x^2 + 2(-a)x + \left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

共有点を持たないためにはこの x の 2 次方程式が実数解を持たなければよいので、判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D/4 &= (-a)^2 - 2\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) < 0 \\ a^2 + 2a - 3 &> 0 \\ (a-1)(a+3) &> 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ なので,}$$

$$\underline{a > 1}$$

$$(2) \quad f(x) = -x^2 + \frac{3}{2} \text{ とおくと, } f'(x) = -2x$$

$$C_1: y = f(x) \text{ 上の点 } P_1\left(p, -p^2 + \frac{3}{2}\right) \text{ における接線 } l_1 \text{ の傾きは}$$

$$f'(p) = -2p$$

$$g(x) = (x-a)^2 + a \text{ とおくと, } g'(x) = 2(x-a)$$

$$C_2: y = g(x) \text{ 上の点 } P_2\left(q, (q-a)^2 + a\right) \text{ における接線 } l_2 \text{ の傾きは}$$

$$g'(q) = 2(q-a)$$

とおける.

$l_1 \parallel l_2$ となるためには

$$\begin{aligned} -2p &= 2(q-a) \\ q &= a-p \end{aligned}$$

$$\text{よって, } P_2\left(a-p, \{(a-p)-a\}^2 + a\right) = \underline{(a-p, p^2 + a)}$$

また, l_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y - (p^2 + a) &= -2p\{x - (a-p)\} \\ \underline{y} &= \underline{-2px - p^2 + 2ap + a} \end{aligned}$$

$$(3) \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ が共有点をもたないので, (1)より } a > 1$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} a-p-p \\ p^2 + a + p^2 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2p \\ 2p^2 + a - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$l_1 \text{ の方向ベクトルを } \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2p \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{l}_1 \text{ より } \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{l}_1 = 0$$

$$\begin{aligned} (a-2p) \cdot 1 + \left(2p^2 + a - \frac{3}{2}\right) \cdot (-2p) &= 0 \\ (2p-1)a + (4p^3 - p) &= 0 \\ (2p-1)a + p(2p+1)(2p-1) &= 0 \\ (2p-1)\{a + p(2p+1)\} &= 0 \\ (2p-1)(2p^2 + p + a) &= 0 \end{aligned}$$

$$2p^2 + p + a = 2\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + a - \frac{1}{8} > 0 \quad (\because a > 1) \text{ なので}$$

$$\underline{p = \frac{1}{2}}$$

2

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(1) \quad a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \quad \dots \textcircled{3} \text{ より, } a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - sta_n \quad \dots \textcircled{3}'$$

②, ③' の係数を比較すると

$$s+t=1, -st=3$$

$$\therefore s+t=1, st=-3$$

よって s, t は x の 2 次方程式

$$x^2 - x - 3 = 0$$

の実数解で

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$s > t$ より

$$(s, t) = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

また,

$$a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \quad \dots \textcircled{4} \text{ より, } a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - sta_n \quad \dots \textcircled{4}'$$

②, ④' より同様にして

$$(s, t) = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

を得る. 以上より

$$(s, t) = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

(2) ③ より数列 $\{a_{n+1} - sa_n\}$ は初項 $a_2 - sa_1 = 1 - s$ ($\because$ ①), 公比 t の等比数列なので

$$a_{n+1} - sa_n = (1 - s) \cdot t^{n-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

④ より数列 $\{a_{n+1} - ta_n\}$ は初項 $a_2 - ta_1 = 1 - t$ ($\because$ ①), 公比 s の等比数列なので

$$a_{n+1} - ta_n = (1 - t) \cdot s^{n-1} \quad \dots \textcircled{6}$$

⑥ - ⑤ より,

$$(s - t)a_n = (1 - t) \cdot s^{n-1} - (1 - s) \cdot t^{n-1}$$

$$(s, t) = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right) \text{ を代入すると}$$

$$\sqrt{13}a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{\sqrt{13}}{13} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n \right\}$$

(1) 点 D は BC を $(p+1):p$ に外分する点なので,

$$\overrightarrow{BD} = (p+1)\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OD} = -p\overrightarrow{OB} + (p+1)\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= p\overrightarrow{OC} + (p+1)\overrightarrow{OC} \\ &= (2p+1)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

(2) 点 X は AD 上の点なので

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AD} \quad (\text{ただし, } k \text{ は } k \neq 0 \text{ である実数})$$

とおけて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD} \\ &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k(2p+1)\overrightarrow{OC} \quad (\because (1)) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また、点 X は $\triangle ABC$ の外接円上の点なので、

$$|\overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OA}|$$

①を代入して

$$|(1-k)\overline{OA} + k(2p+1)\overline{OC}| = |\overline{OA}|$$

両辺を2乗すると、

$$(1-k)^2 |\overline{\mathbf{OA}}|^2 + 2(1-k)k(2p+1) \overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OC}} + k^2 (2p+1)^2 |\overline{\mathbf{OC}}|^2 = |\overline{\mathbf{OA}}|^2$$

ここで、

$$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}|, \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC} \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

なので

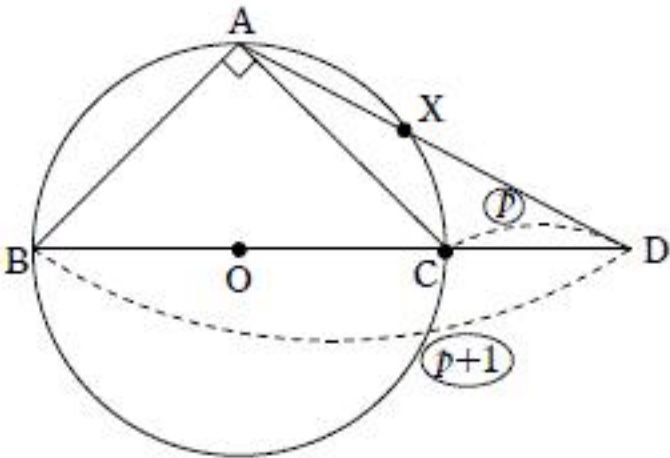
$$\begin{aligned} (1-k)^2 |\overline{\text{OA}}|^2 + k^2 (2p+1)^2 |\overline{\text{OA}}|^2 &= |\overline{\text{OA}}|^2 \\ (4p^2 + 4p + 2)k^2 - 2k &= 0 \end{aligned}$$

 $k \neq 0$ より

$$k = \frac{1}{2p^2 + 2p + 1}$$

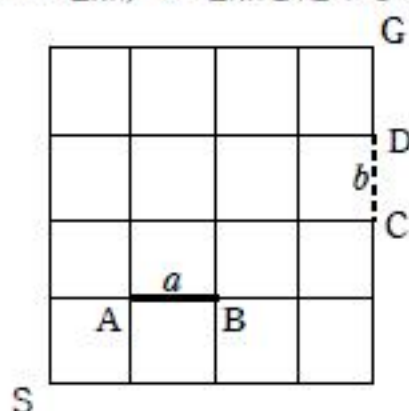
①に代入して,

$$\overline{OX} = \frac{2p^2 + 2p}{2p^2 + 2p + 1} \overline{OA} + \frac{2p + 1}{2p^2 + 2p + 1} \overline{OC}$$



4

図のように A 地点, B 地点, C 地点, D 地点を定める.



(1) S から A に進む経路は 2 通り

A から B に進む経路は 1 通り

B から G に進む経路は 2 つの $\rightarrow$ と 3 つの $\uparrow$ の並べ方の個数と同じなので $\frac{5!}{2!3!} = 10$ 通り.

よって, a を通り抜ける経路は

$$2 \times 1 \times 10 = \underline{20 \text{ 通り}}$$

(2) S から C に進む経路は $\frac{6!}{4!2!} = 15$ 通り

C から D に進む経路は 1 通り

D から G に進む経路は 1 通り

よって, b を通り抜ける経路は

$$15 \times 1 \times 1 = 15 \text{ 通り}$$

S から A に進む経路は 2 通り

A から B に進む経路は 1 通り

B から C に進む経路は $\frac{3!}{2!} = 3$ 通り

C から D に進む経路は 1 通り

D から G に進む経路は 1 通り

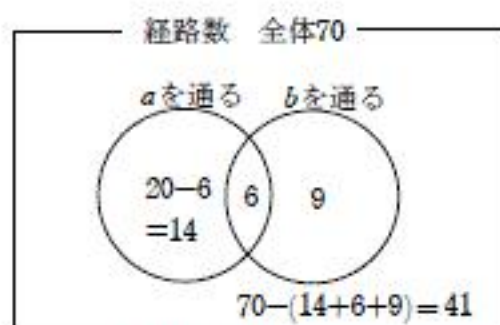
よって, a を通り抜けて, b を通り抜ける経路は

$$2 \times 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 6 \text{ 通り}$$

ゆえに, a を通り抜けず, b を通り抜ける経路は

$$15 - 6 = \underline{9 \text{ 通り}}$$

(3) S から G に進む経路は $\frac{8!}{4!4!} = 70$ 通り



(1)より20通り

S から G に到達するのにかかる時間の確率分布は下表の通り

時間	(a だけ通る) 15 分	(b だけ通る) 22 分	(a も b も通る) 21 分	(a も b も通らない) 16 分
確率	$\frac{14}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{41}{70}$

よって求める期待値は

$$15 \cdot \frac{14}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 21 \cdot \frac{6}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} = \frac{1190}{70} = \underline{17 \text{ 分}}$$