

$$(1) f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 \text{ より}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$$

$$= 4x(x^2 - 3x - 4)$$

$$= 4x(x+1)(x-4)$$

増減および極大・極小は下表の通り

x		-1		0		4	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $x=0$ のとき 極大値 $= f(0) = 0$

$x=-1$ のとき 極小値 $= f(-1) = -3$

$x=4$ のとき 極大値 $= f(4) = -128$

(2) 求める直線は y 軸に平行ではないので

$$y = mx + n$$

とおける. (m, n は実数)

この直線が $y = f(x)$ と 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ で接するので

$$(x^4 - 4x^3 - 8x^2) - (mx + n) = (x-a)^2(x-b)^2$$

右辺を展開して両辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} -4 = -2(a+b) & \dots \textcircled{1} \\ -8 = a^2 + 4ab + b^2 & \dots \textcircled{2} \\ -m = -2ab(a+b) & \dots \textcircled{3} \\ -n = (ab)^2 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } a+b=2 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ より } (a+b)^2 + 2ab = -8$$

$$\textcircled{1}' \text{ を代入して } ab = -6 \quad \dots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{1}', \textcircled{2}'$ を $\textcircled{3}$ に代入して

$$m = -24$$

$\textcircled{2}'$ を $\textcircled{4}$ に代入して

$$n = -36$$

(ただし、 $\textcircled{1}', \textcircled{2}'$ より a, b は t の 2 次方程式 $t^2 - t - 6 = 0$ の実数解)

ゆえに、求める直線の方程式は

$$\underline{y = -24x - 36}$$

2

(1) 図のように座標を設定しても一般性を失わない.

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 1 & \dots \textcircled{1} \\ 0 \leq q \leq 2 & \dots \textcircled{2} \\ pq \leq \frac{1}{2} & \dots \textcircled{3} \\ p+q=t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

③, ④ より p, q は X の 2 次方程式

$$X^2 - tX + \frac{1}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

の実数解で, ①, ② より 2 つの実数解はともに $0 \leq X \leq 1$ の範囲にあるとよい.
ここで,

$$\begin{aligned} f(X) &= X^2 - tX + \frac{1}{2} \\ &= \left(X - \frac{1}{2}t\right)^2 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

とおくと,

$Y = f(X)$ が $0 \leq X \leq 1$ に 2 つの共有点をもつとよいので,

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2}t \leq 1 \\ f\left(\frac{1}{2}t\right) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \leq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \geq 0 \\ f(1) = -t + \frac{3}{2} \geq 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ t \leq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq t \\ t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

したがって, 求める t の範囲は

$$\underline{\sqrt{2} \leq t \leq \frac{3}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -1 \end{pmatrix}$ より,

$\triangle CPQ$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{CP}|^2 |\overrightarrow{CQ}|^2 - (\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + 1)(q^2 + 1) - 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(pq)^2 + (p+q)^2 - 2pq} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{3}{4}} \quad (\because \textcircled{3}, \textcircled{4}) \end{aligned}$$

(3) (1), (2) より

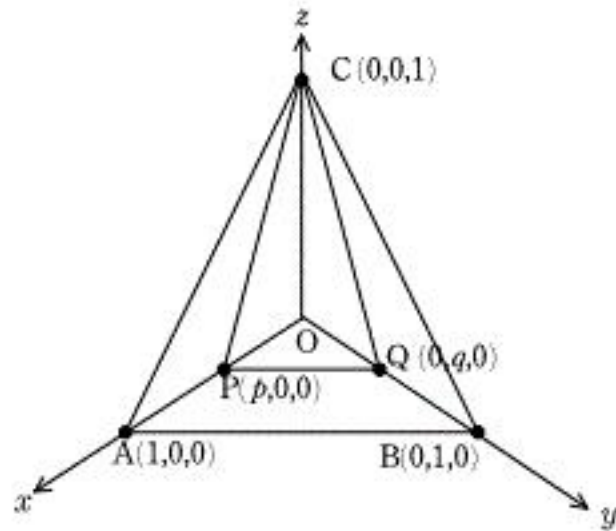
$$S = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{3}{4}} \quad \left(\sqrt{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \right)$$

なので, S は $t = \sqrt{2}$ のとき, 最小値 $= \frac{\sqrt{5}}{4}$ をとる. このとき, ⑤ より

$$X^2 - \sqrt{2}X + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

よって,

$$\underline{(p, q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$



$$A_{n+1}A_n = A_n + 2E \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

(1) すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもつことを数学的帰納法により証明する.

[I] $n=1$ のとき

条件より明らかに成立する

[II] $n=k$ (ただし, $k=1, 2, 3, \dots$) のとき

$A_k + E$ が逆行列 $(A_k + E)^{-1}$ をもつと仮定する.

このとき ① より

$$A_{k+1}A_k = A_k + 2E$$

両辺に右から A_k^{-1} を掛けると

$$A_{k+1} = E + 2A_k^{-1}$$

両辺に E を加えると

$$A_{k+1} + E = 2E + 2A_k^{-1}$$

$$A_{k+1} + E = 2(A_k + E)A_k^{-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

両辺に右から $\frac{1}{2}A_k$ を掛けると

$$(A_{k+1} + E) \cdot \frac{1}{2}A_k = A_k + E$$

さらに両辺に右から $A_k + E$ の逆行列 $(A_k + E)^{-1}$ を掛けると

$$(A_{k+1} + E) \cdot \frac{1}{2}A_k(A_k + E)^{-1} = E \quad \dots \textcircled{3}$$

また ② の両辺に左から $\frac{1}{2}A_k(A_k + E)^{-1}$ を掛けると, 同様にして

$$\frac{1}{2}A_k(A_k + E)^{-1} \cdot (A_{k+1} + E) = E \quad \dots \textcircled{4}$$

よって, $n=k+1$ のときも $A_k + E$ は逆行列をもつ.

以上[I][II]よりすべての自然数 n で $A_k + E$ は逆行列をもつ.

また ③, ④ より

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

が成立する.

(2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ より

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (2E - A_{n+1})(A_{n+1} + E)^{-1} \\ &= (2E - A_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot A_n(A_n + E)^{-1} \quad (\because \textcircled{5}) \\ &= \frac{1}{2}(2A_n - A_{n+1}A_n)(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2A_n - A_n - 2E)(A_n + E)^{-1} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -\frac{1}{2}(2E - A_n)(A_n + E)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}B_n \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \underline{B_{n+1} = -\frac{1}{2}B_n}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } B_n = -\frac{1}{2}B_{n-1}$$

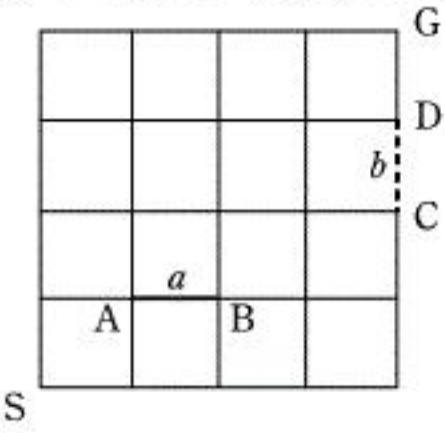
この関係を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{2}B_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}B_{n-2} \right) \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} B_1 \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成立}) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \underline{B_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} B_1}$$

4

図のように A 地点、B 地点、C 地点、D 地点を定める。



- (1) S から A に進む経路は 2 通り
A から B に進む経路は 1 通り

B から G に進む経路は 2 つの→と 3 つの↑の並べ方の個数と同じなので $\frac{5!}{2!3!}=10$ 通り。

よって、 a を通り抜ける経路は
 $2 \times 1 \times 10 = \underline{20}$ 通り

- (2) S から C に進む経路は $\frac{6!}{4!2!}=15$ 通り

C から D に進む経路は 1 通り
D から G に進む経路は 1 通り
よって、 b を通り抜ける経路は

$15 \times 1 \times 1 = 15$ 通り
S から A に進む経路は 2 通り
A から B に進む経路は 1 通り

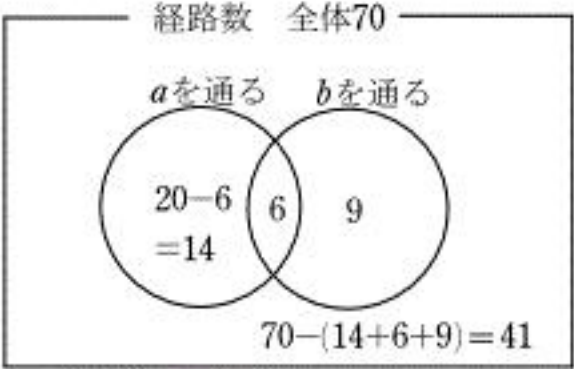
B から C に進む経路は $\frac{3!}{2!}=3$ 通り

C から D に進む経路は 1 通り
D から G に進む経路は 1 通り

よって、 a を通り抜けて、 b を通り抜ける経路は
 $2 \times 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 6$ 通り

ゆえに、 a を通り抜けず、 b を通り抜ける経路は
 $15 - 6 = \underline{9}$ 通り

- (3) S から G に進む経路は $\frac{8!}{4!4!}=70$ 通り



(1)より20通り

S から G に到達するのにかかる時間の確率分布は下表の通り

時間	(a だけ通る) 15 分	(b だけ通る) 22 分	(a も b も通る) 21 分	(a も b も通らない) 16 分
確率	$\frac{14}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{41}{70}$

よって求める期待値は

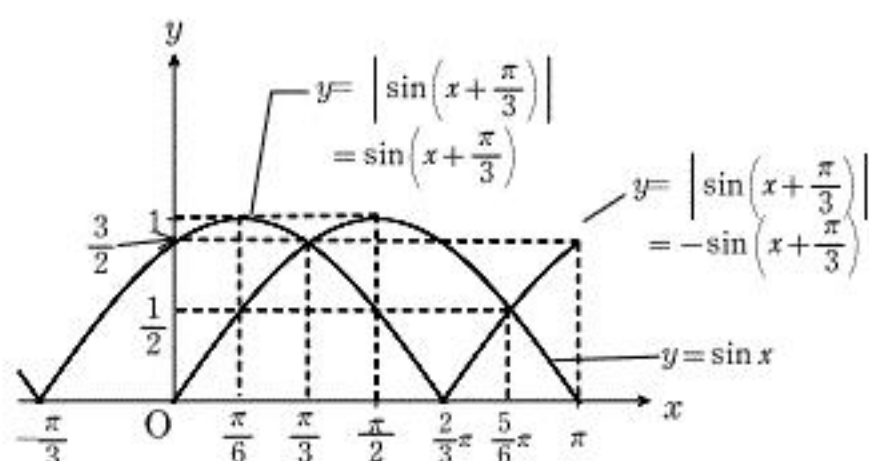
$$15 \cdot \frac{14}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 21 \cdot \frac{6}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} = \frac{1190}{70} = \underline{17 \text{ 分}}$$

$$(1) \quad f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta \quad \text{より}$$

$$f'(x) = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - |\sin x|$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{のとき}$$

$$f'(x) = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - \sin x$$



$y = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$ と $y = \sin x$ のグラフの上下関係から増減は下表の通り

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5}{6}\pi$		π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin \theta d\theta \\ &= [-\cos \theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= -\left(\cos \frac{2}{3}\pi - \cos \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\left\{\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta \\ &= -\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \sin \theta d\theta \\ &= [\cos \theta]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi - \cos \pi \\ &= -\frac{1}{2} - (-1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $x = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 = 1

また,

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta \\ &= [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta \\ &= \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta + \int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} (-\sin \theta) d\theta \\ &= [\cos \theta]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} + [\cos \theta]_{\frac{7}{6}\pi}^{\pi} \\ &= \cos \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{7}{6}\pi - 2\cos \pi \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって, $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき 最小値 = $2 - \sqrt{3}$