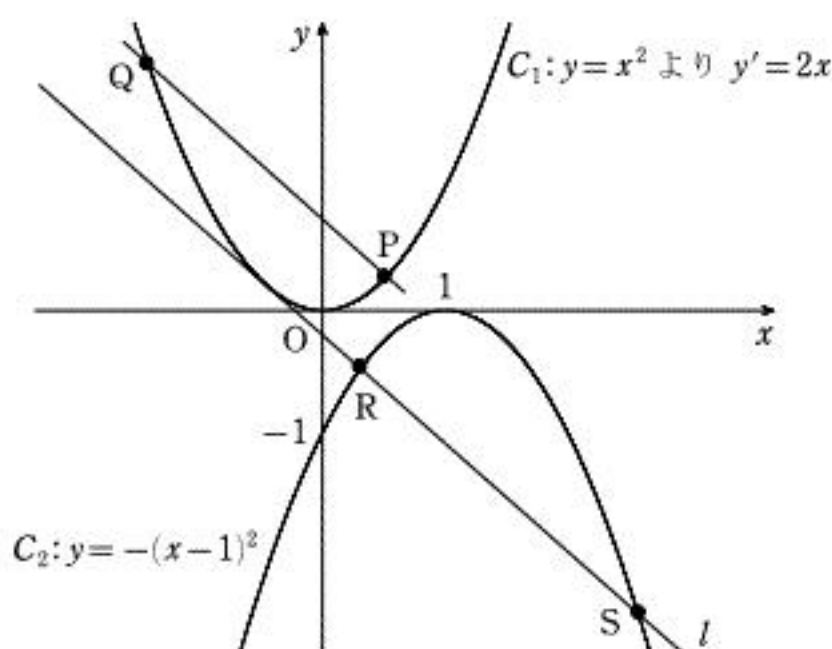


1

(1)



$$(PQ \text{ の傾き}) = \frac{4a^2 - a^2}{-2a - a} = -a$$

これが l の傾きと一致するためには、接点の x 座標を t とすると、

$$2t = -a$$

$$t = -\frac{a}{2}$$

よって C_1 上の点 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ における接線 l は

$$y - \frac{a^2}{4} = -a \left(x + \frac{a}{2} \right)$$

$$\underline{y = -ax - \frac{a^2}{4}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつためには、

$$-(x-1)^2 = -ax - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 - (a+2)x + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が相異なる 2 つの実数解をもつとよい..

判別式を D とおくと、

$$D = \{-(a+2)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) > 0$$

$$2a^2 + 4a > 0$$

$$2a(a+2) > 0$$

$$\underline{a < -2, 0 < a} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) R, S の x 座標をそれぞれ r, s とおく.

直線 PQ は直線 l と同じ傾きなので、

$$|a - (-2a)| = |r - s|$$

となるとよい.

両辺を 2 乗すると

$$9a^2 = (r - s)^2$$

$$9a^2 = (r + s)^2 - 4rs$$

r, s は $\textcircled{1}$ の実数解なので

$$\begin{cases} r + s = a + 2 \\ rs = 1 - \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

これらを代入すると

$$9a^2 = (a+2)^2 - 4 \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$7a^2 - 4a = 0$$

$$a(7a - 4) = 0$$

$$a \neq 0 \text{ より, } a = \underline{\underline{\frac{4}{7}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{p} a_n - (-1)^{n+1}$$

両辺に p^{n+1} を掛けると,

$$p^{n+1} a_{n+1} = p^n a_n - (-p)^{n+1}$$

$b_n = p^n a_n$ とおくと,

$$\underline{b_{n+1} = b_n - (-p)^{n+1}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad b_{n+1} - b_n = -(-p)^{n+1}$$

$n \geq 2$ のとき, n を $1, 2, 3, \dots, n-1$ と具体化し, 辺々の和を採ると,

$$\begin{array}{rcl}
 & \cancel{b_2} - b_1 & = -(-p)^2 \\
 & \cancel{b_3} - \cancel{b_2} & = -(-p)^3 \\
 & \cancel{b_4} - \cancel{b_3} & = -(-p)^4 \\
 & \vdots & \\
 +) & b_n - \cancel{b_{n-1}} & = -(-p)^n \\
 \hline
 & b_n - b_1 & = -\{(-p)^2 + (-p)^3 + (-p)^4 + \dots + (-p)^n\}
 \end{array}$$

$$p^n a_n - p^1 a_1 = -\{(-p)^2 + (-p)^3 + \dots + (-p)^n\}$$

$$a_1 = 1 \text{ なので, } p^n a_n = -\{(-p) + (-p)^2 + (-p)^3 + \dots + (-p)^n\}$$

(i) $-p \neq 1$ つまり $p \neq -1$ のとき

$$p^n a_n = -\frac{(-p)\{1 - (-p)^n\}}{1 - (-p)}$$

$$a_n = \frac{1 - (-p)^n}{(1+p) \cdot p^{n-1}}$$

これは $n=1$ のときも $a_1 = 1$ となり成立.

(ii) $-p = 1$ つまり $p = -1$ のとき

$$(-1)^n a_n = -(1+1+1+\dots+1)$$

$$(-1)^n a_n = -n$$

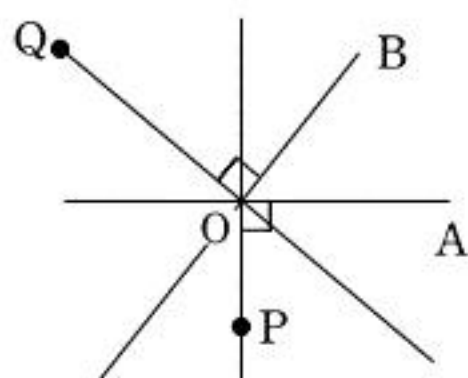
$$a_n = \frac{-n}{(-1)^n}$$

これは $n=1$ のときも $a_1 = 1$ となり成立.

以上(i), (ii)より,

$$\underline{a_n = \begin{cases} (-1)^{n-1} \cdot n & (p = -1 \text{ のとき}) \\ \frac{1 - (-p)^n}{(1+p) \cdot p^{n-1}} & (p \neq -1 \text{ のとき}) \end{cases}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1)



$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP} \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OQ} \text{ より } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$$

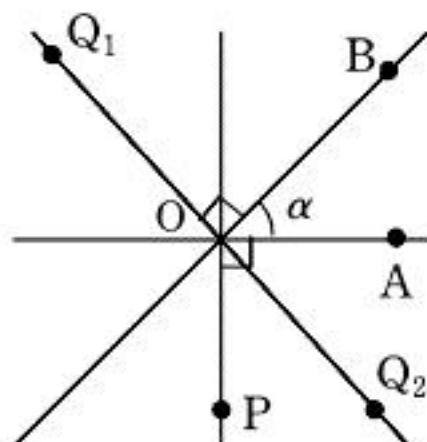
$$(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \perp \overrightarrow{AB} \text{ より, } (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

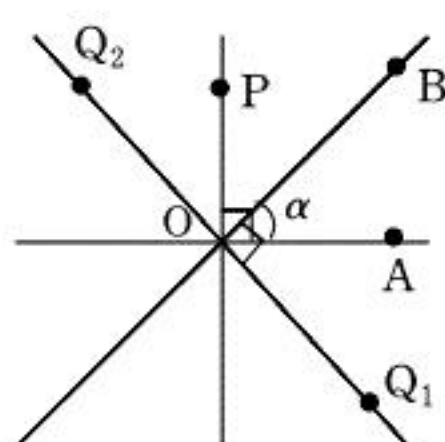
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\underline{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)



(図 1)



(図 2)

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 α は鋭角なので, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ に関して, 点 B の位置は図 1, 図 2 の 2 通り.
そのそれぞれに対して点 Q の位置は Q_1 と Q_2 の 2 通りあるが,

$$(1) \text{ より } |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \angle POB = |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cos \angle QOA \quad \dots\dots ①$$

$\angle BOP$ と $\angle AOQ$ の鋭角, 鈍角は一致するので, いずれも Q_1 の位置になる.

以下 Q_1 を Q として考える.

図 1 で

$$\begin{aligned} \angle POQ &= 2\pi - (\angle POA + \angle AOB + \angle BOQ) \\ &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi - \alpha \end{aligned}$$

図 2 で

$$\begin{aligned} \angle POQ &= \angle POB + \angle AOB + \angle AOQ \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= \pi - \alpha \end{aligned}$$

よって, $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角は $\pi - \alpha$ である.

$$(3) (2) \text{ の図 1 で } \angle POB = \frac{\pi}{2} + \alpha = \angle QOA$$

$$\text{図 2 で } \angle POB = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle QOA$$

いずれにせよ, $\angle POB = \angle QOA$ である.

これと①より,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OA}|$$

したがって,

$$\underline{\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

カードの並べ方は全部で $52!$ 通り

- (1) 番号 7 のカードをひとかたまりとし、このかたまりと他の 48 枚のカードを並べる.

この並べ方は $(1+48)! = 49!$ 通り.

さらに、それぞれの並べ方ごとにかたまり内での 4 枚のカードの並べ方が $4!$ 通りずつある.

よって、求める確率は

$$\frac{49! \cdot 4!}{52!} = \frac{\overset{1}{\cancel{49!}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 1}{\underset{13}{\cancel{52}} \cdot \underset{17}{\cancel{51}} \cdot \underset{25}{\cancel{50}} \cdot \underset{1}{\cancel{49!}}} = \frac{1}{5525} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2) まず、番号 7 以外の 48 枚のカードを並べる.

次に、48 枚のカードの間 47 ヶ所と両端の 2 ヶ所の 49 ヶ所から 2 ヶ所選んで、

その場所に 2 枚ずつ番号 7 のカードを並べるとよい.

よって、求める確率は

$$\frac{48! \cdot ({}_{49}C_2 \cdot 4!)}{52!} = \frac{\overset{1}{\cancel{48!}} \cdot \left(\overset{1}{\cancel{49}} \cdot 24 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 1 \right)}{\underset{13}{\cancel{52}} \cdot \underset{17}{\cancel{51}} \cdot \underset{25}{\cancel{50}} \cdot \underset{1}{\cancel{49}} \cdot \underset{1}{\cancel{48!}}} = \frac{24}{5525} \quad \dots\dots (\text{答})$$