

$$\begin{aligned}
 (1) \quad C_1: y &= (x-1)e^x \text{ より,} \\
 y' &= 1 \cdot e^x + (x-1)e^x \\
 &= x \cdot e^x
 \end{aligned}$$

よって、 C_1 上の点 $(t, (t-1)e^t)$ における接線は、

$$\begin{aligned}
 y - (t-1)e^t &= te^t(x-t) \\
 y &= te^t x - (t^2 - t + 1)e^t
 \end{aligned}$$

これが、 $C_2: y = \frac{1}{2e}x^2 + a$ と接するためには、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2e}x^2 + a &= te^t x - (t^2 - t + 1)e^t \\
 \frac{1}{2e}x^2 - te^t x + a + (t^2 - t + 1)e^t &= 0
 \end{aligned}$$

が重解をもつとよい。

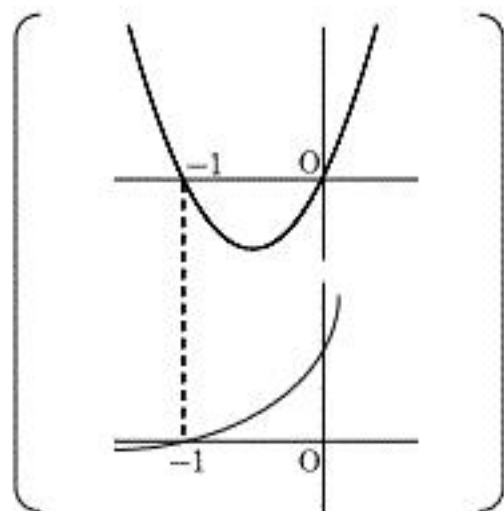
判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}
 D &= (-te^t)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2e} \{a + (t^2 - t + 1)e^t\} = 0 \\
 -\frac{2}{e}a &= -t^2 e^{2t} + \frac{2}{e}(t^2 - t + 1)e^t \\
 \underline{a} &= \underline{\frac{1}{2}t^2 e^{2t+1} - (t^2 - t + 1)e^t} \quad \cdots \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot e^{2t+1} + \frac{1}{2} t^2 \cdot 2 \cdot e^{2t+1} - (2t-1)e^t - (t^2 - t + 1)e^t \\
 &= (t^2 + t)e^{2t+1} - (t^2 + t)e^t \\
 &= t(t+1)e^t(e^{t+1} - 1)
 \end{aligned}$$

増減は下表のとおり。

t	-1		0	
$\frac{da}{dt}$	-	0	-	0
a	↘		↗	



よって、 $\underline{t=0}$ で極小となり、 a の極小値 $= \underline{-1}$ $\cdots \cdots (\text{答})$

$$(1) \quad a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$$

両辺を p^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$$b_n = \frac{a_n}{p^n} \text{ とおくと、}$$

$$b_{n+1} = b_n + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$n \geq 2$ のとき、 n を $1, 2, 3, 4, \dots, n-1$ と具体化して辺々の和を採ると、

$$\begin{array}{rcl}
 & \cancel{b_2} - b_1 & = \left(-\frac{q}{p}\right)^2 \\
 & \cancel{b_3} - \cancel{b_2} & = \left(-\frac{q}{p}\right)^3 \\
 & \cancel{b_4} - \cancel{b_3} & = \left(-\frac{q}{p}\right)^4 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & b_n - \cancel{b_{n-1}} & = \left(-\frac{q}{p}\right)^n \\
 + & \underbrace{\hspace{10em}} & \\
 & b_n - b_1 & = \left(-\frac{q}{p}\right)^2 + \left(-\frac{q}{p}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{q}{p}\right)^n
 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{p^1} = \frac{0}{p} = 0, \text{ 右辺は初項 } \left(-\frac{q}{p}\right)^2, \text{ 公比 } -\frac{q}{p} (< 0) \text{ の等比数列の}$$

はじめの $(n-1)$ 項の和なので、

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^2 \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)} \\
 &= \frac{\frac{q^2}{p^2} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{p+q}{p}} \\
 &= \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}
 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも $b_1 = 0$ となり成立する。

よって、

$$b_n = \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\} \quad (n=1, 2, 3, 4, \dots)$$

(2) (1)より、

$$\frac{a_n}{p^n} = \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$q=1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{p^n} &= \frac{1}{p(p+1)} \left\{1 - \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\} \\
 a_n &= \frac{p^{n-1}}{p+1} \left\{1 - \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\} \\
 &= \frac{1}{p+1} \{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\}
 \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{p+1} \{p^n - (-1)^n\} - \frac{1}{p+1} \{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\} \\
 &= \frac{1}{p+1} \{p^{n-1}(p-1)\} - (-1)^{n-1} \{(-1) - 1\} \\
 &= \frac{1}{p+1} \{(p-1)p^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\}
 \end{aligned}$$

であるから、 $a_{n+1} \geq a_n$ となるのは

すべての自然数で

$$(p-1)p^{n-1} + 2(-1)^{n-1} \geq 0$$

となるとき、

$$n=1 \text{ のとき、 } (p-1) \cdot 1 + 2 = p+1 > 0 \quad (p > 0 \text{ より})$$

$$n=2 \text{ のとき、 } (p-1) \cdot p + 2 \cdot (-1) = p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1) \geq 0$$

$$p > 0 \text{ より、 } p \geq 2$$

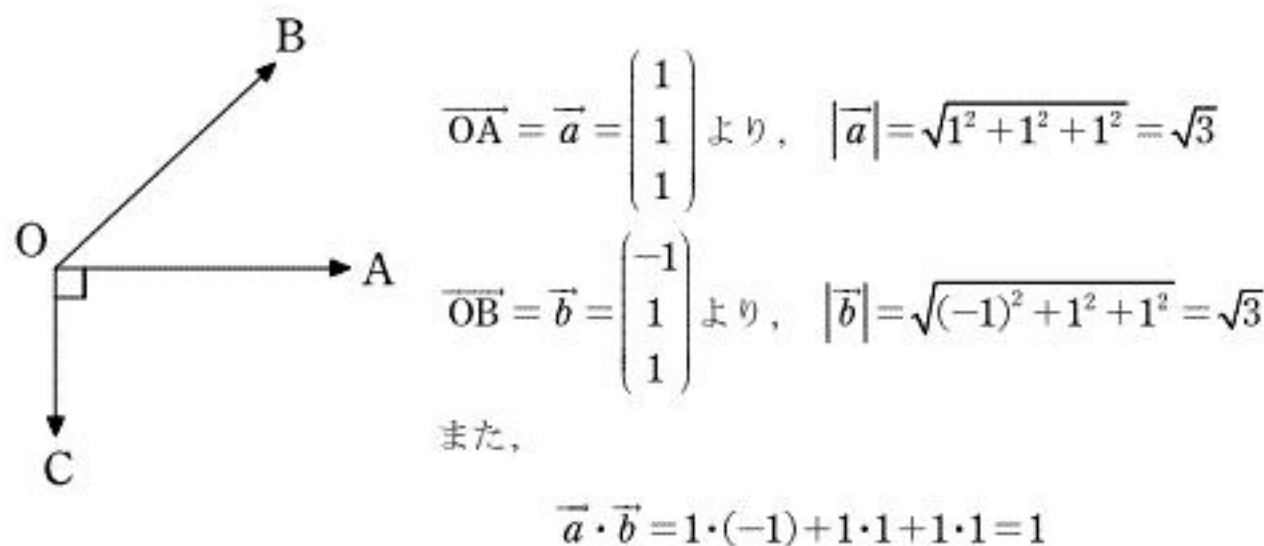
これより、 $p \geq 2$ であることが必要。

逆に $p \geq 2$ のとき

$$(p-1)p^{n-1} + 2(-1)^{n-1} \geq (2-1) \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1} \geq 0$$

となり、十分性を満たす。

以上より、求める p の範囲は $p \geq 2$ …… (答)



(1) $\vec{c}$ は平面 α 上にあるので,

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

$$= \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \\ p+q \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①'$$

とおける. (ただし, p, q は実数)

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ より, } \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(p-q) \cdot 1 + (p+q) \cdot 1 + (p+q) \cdot 1 = 0$$

$$q = -3p$$

①' に代入すると,

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4p \\ -2p \\ -2p \end{pmatrix}$$

$$\text{また, } |\vec{c}| = 1 \text{ より, } |\vec{c}|^2 = 1$$

$$(4p)^2 + (-2p)^2 + (-2p)^2 = 1$$

$$24p^2 = 1$$

したがって,

$$p = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\vec{c} \text{ の } x \text{ 成分は正なので, } p = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

したがって,

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{つまり, } \underline{C\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad (1) \text{ より, } p = \frac{\sqrt{6}}{12}, q = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

これらを①に代入すると,

$$\vec{c} = \frac{\sqrt{6}}{12}\vec{a} - \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}$$

したがって,

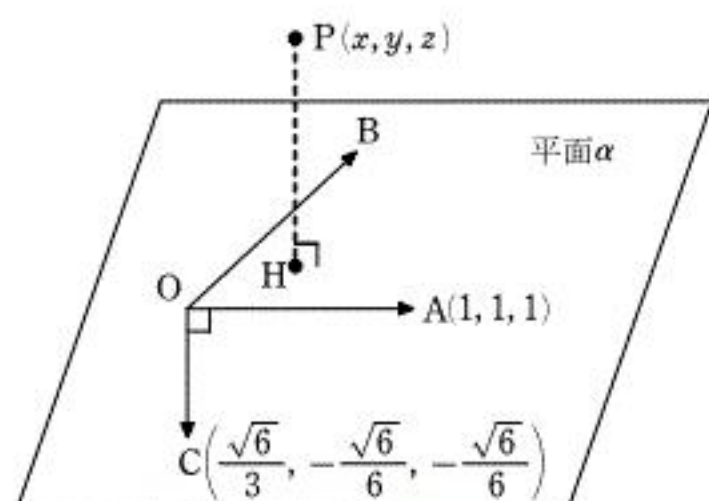
$$\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{b} = \frac{\sqrt{6}}{12}\vec{a} - \vec{c}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\vec{c}$$

よって,

$$\underline{s = \frac{1}{3}, t = -\frac{2\sqrt{6}}{3}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)



点 H は平面 α 上の点なので,

$$\overrightarrow{OH} = k\vec{a} + l\vec{c}$$

とおける. (ただし, k, l は実数)

$$\overrightarrow{PH} \perp \text{平面}\alpha$$

なので,

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{a} \text{ かつ } \overrightarrow{PH} \perp \vec{c}$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{a} \text{ より, } \overrightarrow{PH} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$(k\vec{a} + l\vec{c} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \left(\text{ただし, } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$k|\vec{a}|^2 + l\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{p} \cdot \vec{a} = 0$$

$$k(\sqrt{3})^2 + l \cdot 0 - (x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1) = 0$$

$$\underline{k = \frac{1}{3}(x + y + z)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{c} \text{ より, } \overrightarrow{PH} \cdot \vec{c} = 0$$

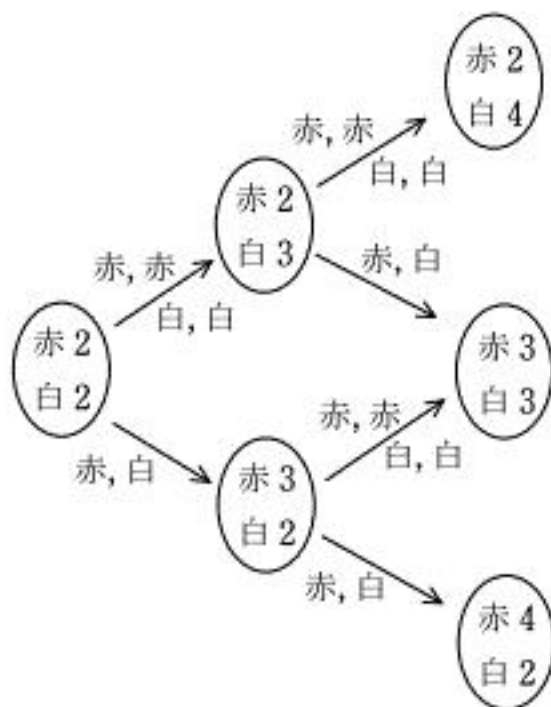
$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$(k\vec{a} + l\vec{c} - \vec{p}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$k\vec{a} \cdot \vec{c} + l|\vec{c}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{c} = 0$$

$$k \cdot 0 + l \cdot 1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{6}y - \frac{\sqrt{6}}{6}z \right) = 0$$

$$\underline{l = \frac{\sqrt{6}}{6}(2x - y - z)} \quad \dots\dots (\text{答})$$



- (1) $X_1 = 3$ となるためには赤玉 2 個、白玉 2 個の袋の中から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出すとよいので、求める確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2 \cdot 2}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2) $X_2 = 3$ となるのは、下の (i), (ii) の場合がある。

- (i) $X_1 = 2$ となったあと

赤玉 2 個、白玉 3 個の袋の中から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す場合、

$X_1 = 2$ となるのは、 $X_1 = 3$ の余事象であることに注意すると、この場合の確率は

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{1}{5}$$

- (ii) $X_1 = 3$ となったあと

赤玉 3 個、白玉 2 個の袋の中から、赤玉 2 個または白玉 2 個を取り出す場合、

この場合の確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3+1}{10} = \frac{4}{15}$$

よって、(i), (ii) より、

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \underline{\underline{\frac{7}{15}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3) (2) より、

$$\frac{X_2 = 3 \text{ かつ } X_1 = 3 \text{ の確率}}{X_2 = 3 \text{ の確率}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(1) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$$

とおく.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \sin^n \theta \, d\theta \\ &= \left[-\cos \theta \cdot \sin^n \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta) \cdot n \sin^{n-1} \theta \cdot \cos \theta \, d\theta \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cdot \sin^{n-1} \theta \, d\theta \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \, d\theta - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta \, d\theta \\ &= n I_{n-1} - n I_{n+1} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} (n+1) I_{n+1} &= n I_{n-1} \\ I_{n+1} &= \frac{n}{n+1} I_{n-1} \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta \, d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \, d\theta} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x - \theta) (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) \, d\theta \\ &= x \int_0^x (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) \, d\theta - \int_0^x \theta (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \int_0^x (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) \, d\theta + x \left(\cancel{a \sin^{n+1} x} - \cancel{\sin^{n-1} x} \right) - x \left(\cancel{a \sin^{n+1} x} - \cancel{\sin^{n-1} x} \right) \\ &= \frac{an}{n+1} \int_0^x \sin^{n-1} \theta \, d\theta - \int_0^x \sin^{n-1} \theta \, d\theta \quad ((1) \text{より}) \\ &= \left(\frac{an}{n+1} - 1 \right) \int_0^x \sin^{n-1} \theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ より}$$

$$\left(\frac{an}{n+1} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \, d\theta = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \sin \theta \geq 0 \text{ なので, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta \, d\theta > 0$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{an}{n+1} - 1 &= 0 \\ a &= \frac{n+1}{n} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$a > \frac{3}{2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &> \frac{3}{2} \\ 2n+2 &> 3n \\ n &< 2 \end{aligned}$$

$$n \text{ は自然数なので, } \underline{n=1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\text{これを①に代入して, } \underline{a=2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot (2 \sin^2 \theta - 1) \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot (-\cos 2\theta) \, d\theta \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1) \left(-\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) \\ &= \underline{-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$