

数 学

(数Ⅰ, 数Ⅱ, 数Ⅲ, 数A, 数B)

9:00~11:00

注 意

- 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
- 問題紙は3ページある。
- 解答用紙は

解答用紙番号
数学0-1

 (問①用),

解答用紙番号
数学0-2

 (問②用),

解答用紙番号
数学0-3

 (問③用),

解答用紙番号
数学0-4

 (問④用),

解答用紙番号
数学0-5

 (問⑤用)の5枚である。
- 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
- 受験番号および座席番号(上下2箇所)は、監督者の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
- 各問に対する解答は、それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし、裏面を使用してはならない。
- 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
- 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
- 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

- 1 a は実数とし、2つの曲線

$$C_1: y = (x-1)e^x, \quad C_2: y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある。ただし、 e は自然対数の底である。 C_1 上の点 $(t, (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

- (1) a を t で表せ。
- (2) t が実数全体を動くとき、 a の極小値、およびそのときの t の値を求めよ。

- 2 p, q は正の実数とし、 $a_1 = 0, a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{p^n}$ とする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を p, q, n で表せ。
- (2) $q = 1$ とする。すべての自然数 n について $a_{n+1} \geq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ。

- 3 空間の3点 $O(0, 0, 0), A(1, 1, 1), B(-1, 1, 1)$ の定める平面を α とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。 α 上の点 C があり、その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{OC}$ が $\vec{a}$ に垂直で、大きさが1であるとする。 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

- (1) C の座標を求めよ。
- (2) $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$ をみたす実数 s, t を求めよ。
- (3) α 上にない点 $P(x, y, z)$ から α に垂線を下ろし、 α との交点を H とする。 $\overrightarrow{OH} = k\vec{a} + l\vec{c}$ をみたす実数 k, l を x, y, z で表せ。

- 4** 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

- (i) まず同時に 2 個の玉を取り出す。
- (ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。
- (iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ、1 回の試行を終える。

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

- (1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ。
- (2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ。
- (3) $X_2 = 3$ であったとき、 $X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。

- 5** n は自然数、 a は $a > \frac{3}{2}$ をみたす実数とし、実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x - \theta) (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$$

を考える。ただし、 $n = 1$ のときは $\sin^{n-1} \theta = 1$ とする。

- (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta$ を示せ。
- (2) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ をみたす n と a の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた n と a に対して、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。