

$$\boxed{1} \quad f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ より,}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(1) $C: y = f(x)$ 上の点 $P(s, f(s))$ における接線は,

$$y - f(s) = f'(s)(x - s)$$

$$y = (3s^2 + 2as + b)(x - s) + (s^3 + as^2 + bs + c)$$

$$y = \underline{(3s^2 + 2as + b)x - 2s^3 - as^2 + c} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) P における接線の傾き $f'(s)$ と

Q における接線の傾き $f'(t)$ とが等しくなるとよいので,

$$3s^2 + 2as + b = 3t^2 + 2at + b$$

$$3(s+t)(s-t) + 2a(s-t) = 0$$

$s \neq t$ つまり $s - t \neq 0$ なので,

$$3(s+t) + 2a = 0$$

$$\underline{s+t = -\frac{2}{3}a} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 線分 PQ の中点 $M\left(\frac{s+t}{2}, \frac{f(s)+f(t)}{2}\right)$ を (X, Y) とおくと,

$$\begin{cases} X = \frac{s+t}{2} = -\frac{1}{3}a & (\because (2)) \\ Y = \frac{f(s)+f(t)}{2} \end{cases}$$

ここで,

$$f(X) = \left(-\frac{1}{3}a\right)^3 + a \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right) + c$$

$$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

また,

$$Y = \frac{1}{2}\{(s^3 + t^3) + a(s^2 + t^2) + b(s+t) + 2c\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\{(s+t)^3 - 3st(s+t)\} + a\{(s+t)^2 - 2st\} + b(s+t) + 2c\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^3 - 3st \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right)\right\} + a\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 - 2st\right\} + b \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) + 2c\right]$$

$$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

よって,

$$Y = f(X)$$

が成り立つ.

つまり, 線分 PQ の中点 $M(X, Y)$ は, $C: y = f(x)$ 上にある.

(証明終了)

2

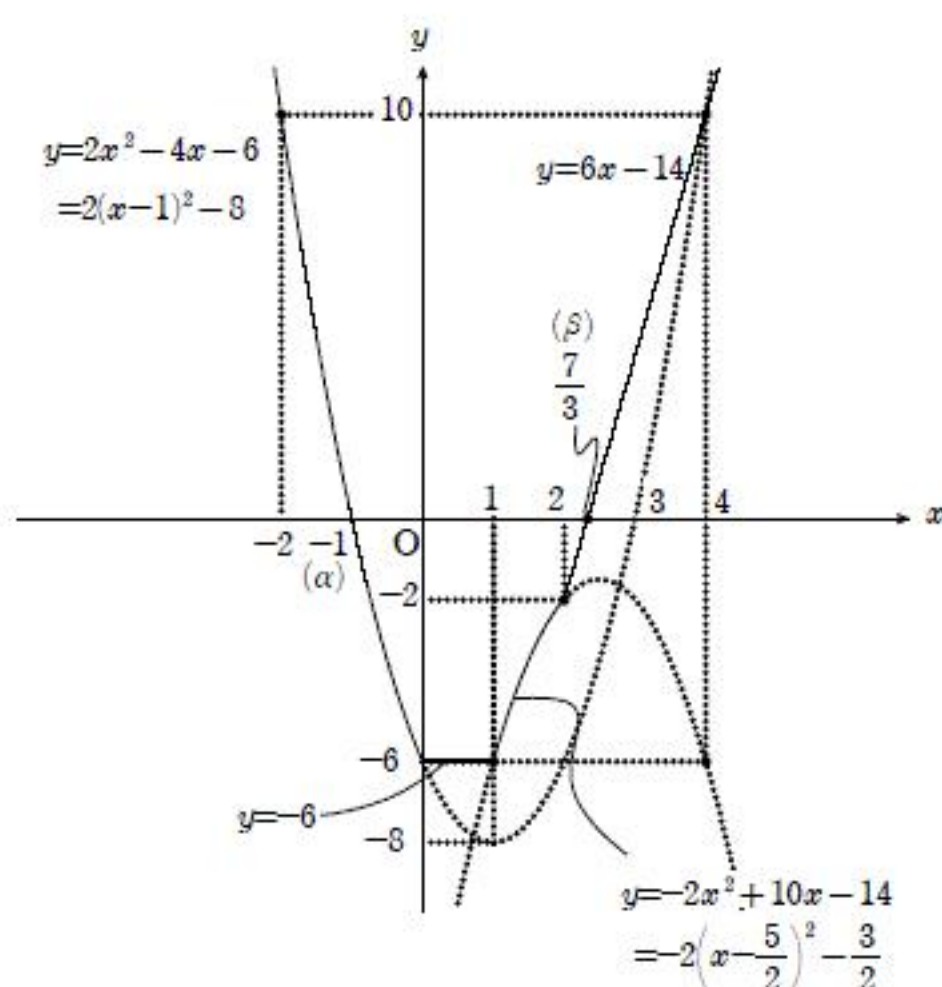
(1)

x	-2	0	1	2	4
$ x(x-2) $	$x(x-2)$ $=x^2-2x$	$-x(x-2)$ $=-x^2+2x$	$-x(x-2)$ $=-x^2+2x$	$x(x-2)$ $=x^2-2x$	
$ (x-1)(x-4) $	$(x-1)(x-4)$ $=x^2-5x+4$	$(x-1)(x-4)$ $=x^2-5x+4$	$-(x-1)(x-4)$ $=-x^2+5x-4$	$-(x-1)(x-4)$ $=-x^2+5x-4$	
和	$2x^2-7x+4$	$-3x+4$	$-2x^2+7x-4$	$3x-4$	

なので,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x - 6 & (-2 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ -6 & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ -2x^2 + 10x - 14 & (1 \leq x \leq 2 \text{ のとき}) \\ 6x - 14 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって, $y=f(x)$ のグラフは下の通り.



グラフと x 軸との交点は,

$-2 \leq x \leq 0$ のとき

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$2(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1$$

$2 \leq x \leq 4$ のとき

$$6x - 14 = 0$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$\alpha < \beta$ より,

$$\underline{\alpha = -1, \beta = \frac{7}{3}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{7}{3}} f(x) dx &= \int_{-1}^0 (2x^2 - 4x - 6) dx + \int_0^1 (-6) dx + \int_1^2 (-2x^2 + 10x - 14) dx \\ &\quad + \int_2^{\frac{7}{3}} (6x - 14) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right]_{-1}^0 + [-6x]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 14x \right]_1^2 + [3x^2 - 14x]_2^{\frac{7}{3}} \\ &= -\frac{10}{3} - 6 - \frac{11}{3} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{40}{3} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

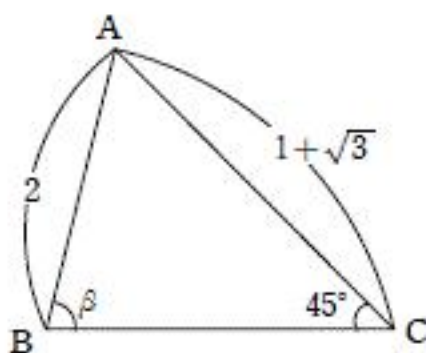
3

(1)

$\triangle ABC$ に正弦定理を用いると

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sin \beta}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



2 倍角の公式より

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $0^\circ < \beta < 135^\circ$ より, $0^\circ < 2\beta < 270^\circ$

$$\cos 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので,}$$

$$2\beta = 150^\circ \text{ または } 2\beta = 210^\circ$$

$$\therefore \beta = 75^\circ \text{ または } \beta = 105^\circ$$

(3) $\triangle ABC$ は鋭角三角なので, $\beta = 75^\circ$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと,
正弦定理より,

$$2R = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$R = \sqrt{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2}$$

円周角と中心角の関係より,

$$\angle AOB = 2\angle ACB = 90^\circ$$

内積より,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

同様に,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos 120^\circ$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos 120^\circ$$

$$s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos 120^\circ$$

$$s \cdot 0 + t(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

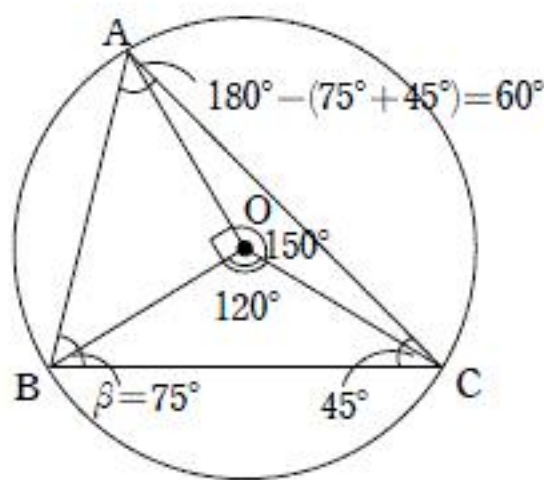
$$\therefore t = -\frac{1}{2}$$

また, 同様に,

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 150^\circ = 0$$

$$(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 150^\circ$$

$$\therefore s = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



4

(1) $x > 0$ なので、相加平均、相乗平均の関係式より、

$$\frac{3x}{x^2+2} = \frac{3}{x+\frac{2}{x}} \leq \frac{3}{2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} < \frac{3}{2}$$

(ただし、等号は $x = \frac{2}{x}$ より、 $x = \sqrt{2}$ でのみ成立)

$$\therefore 0 < \frac{3x}{x^2+2} < \frac{3}{2} \dots\dots ①$$

$\frac{3x}{x^2+2}$ は自然数なので、

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2+2} &= 1 \\ \therefore 3x &= x^2 + 2 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ \underline{x=1, x=2} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $y=1$ のとき、

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = \frac{3x}{x^2+2} + 1$$

これが自然数となるためには、 $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であることが必要。

このとき、(1)より、 $x=1, x=2$

$$\therefore \underline{(x, y) = (1, 1), (2, 1)} \dots\dots (\text{答})$$

$y \geq 2$ のとき、

$$0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \dots\dots ②$$

①, ②より、

$$0 < \frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} < 2$$

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ は自然数なので、

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1 \dots\dots ③$$

②, ③より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{3x}{x^2+2} < 1 \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7} \\ x < 1, 2 < x \end{cases} \end{aligned}$$

x は自然数なので、

$$x = 3, 4, 5$$

$x=3$ を③に代入すると、

$$y = \frac{11}{2} \quad (\text{不適})$$

$x=4$ を③に代入すると、

$$y = 3$$

$x=5$ を③に代入すると、

$$y = \frac{9}{4} \quad (\text{不適})$$

$$\therefore \underline{(x, y) = (4, 3)} \dots\dots (\text{答})$$