

1

$$\begin{aligned} |z| &= 2 \\ w &= z^2 - 2az + 1 \end{aligned}$$

(1) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$\begin{aligned} w &= (x + yi)^2 - 2a(x + yi) + 1 \\ &= (x^2 - y^2 - 2ax + 1) + 2(x - a)yi \\ |w|^2 &= (x^2 - y^2 - 2ax + 1)^2 + 4(x - a)^2 y^2 \end{aligned}$$

また, $|z| = 2$ より,

$$\begin{aligned} |x + yi|^2 &= 2^2 \\ x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \{x^2 - (4 - x^2) - 2ax + 1\}^2 + 4(x - a)^2(4 - x^2) \\ &= (2x^2 - 2ax - 3)^2 + 4(x^2 - 2ax + a^2)(4 - x^2) \\ &= \underline{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $|w| = \sqrt{4\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2 - 9a^2 + 9}$

また,

$$y^2 = 4 - x^2 \geq 0$$

より,

$$-2 \leq x \leq 2$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9 \\ &= 4\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2 - 9a^2 + 9 \end{aligned}$$

とおくと,

(i) $\frac{5}{2}a \leq -2$, つまり, $a \leq -\frac{4}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} |w| \text{ の最小値} &= \sqrt{f(-2)} \\ &= \sqrt{16a^2 + 40a + 25} \\ &= \sqrt{(4a + 5)^2} \\ &= |4a + 5| \end{aligned}$$

(ii) $-2 \leq \frac{5}{2}a \leq 2$, つまり, $-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} |w| \text{ の最小値} &= \sqrt{f\left(\frac{5}{2}a\right)} \\ &= \sqrt{-9a^2 + 9} \\ &= \sqrt{3^2(-a^2 + 1)} \\ &= 3\sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

(iii) $2 \leq \frac{5}{2}a$, つまり, $a \geq \frac{4}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} |w| \text{ の最小値} &= \sqrt{f(2)} \\ &= |4a - 5| \end{aligned}$$

以上より, $|w|$ の最小値は,

$$\begin{cases} -4a - 5 & \left(a \leq -\frac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 4a + 5 & \left(-\frac{5}{4} \leq a \leq -\frac{4}{5} \text{ のとき}\right) \\ 3\sqrt{1 - a^2} & \left(-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5} \text{ のとき}\right) \\ -4a + 5 & \left(\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{5}{4} \text{ のとき}\right) \\ 4a - 5 & \left(a \geq \frac{5}{4} \text{ のとき}\right) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt \\
 &= \frac{e^{-x}}{2a} \int_{-a}^a dt + \int_{-a}^a f(t) \sin t dt \\
 &= e^{-x} + \int_{-a}^a f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_{-a}^a f(t) \sin t dt = A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと, (ただし, A は定数)

$$f(x) = e^{-x} + A \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すなわち,

$$f(t) = e^{-t} + A \quad \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{2}'$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a (e^{-t} + A) \sin t dt &= A \\
 \int_{-a}^a e^{-t} \sin t dt + A \int_{-a}^a \sin t dt &= A \\
 \int_{-a}^a e^{-t} \sin t dt &= A \quad (\sin t \text{ は奇関数より}) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 (e^{-t} \sin t)' &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t \\
 +) \quad (e^{-t} \cos t)' &= -e^{-t} \cos t + e^{-t} (-\sin t) \\
 \hline
 \{e^{-t} (\sin t + \cos t)\}' &= -2e^{-t} \sin t
 \end{aligned}$$

なので, $\textcircled{3}$ 式は,

$$-\frac{1}{2} [e^{-t} (\sin t + \cos t)]_{-a}^a = A$$

ゆえに,

$$A = -\frac{1}{2} e^{-a} (\sin a + \cos a) + \frac{1}{2} e^a (-\sin a + \cos a) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ に代入して,

$$\underline{f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-a} (\sin a + \cos a) + \frac{1}{2} e^a (-\sin a + \cos a)} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より,

$$\begin{aligned}
 g(a) &= -\frac{1}{2} e^{-a} (\sin a + \cos a) + \frac{1}{2} e^a (-\sin a + \cos a) \\
 g'(a) &= -\frac{1}{2} \{-e^{-a} (\sin a + \cos a) + e^{-a} (\cos a - \sin a)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{e^a (-\sin a + \cos a) + e^a (-\cos a - \sin a)\} \\
 &= e^{-a} \sin a - e^a \sin a \\
 &= -(e^a - e^{-a}) \sin a
 \end{aligned}$$

$0 < a \leq 2\pi$ における増減は下表のとおり.

a	$\parallel$	(0)		π		2π
$g'(a)$	$\parallel$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	$\parallel$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

$a = \pi$ のとき $g(a)$ は最小となり,
 $\cdots \cdots (\text{答})$

$$\begin{aligned}
 \text{最小値} &= g(\pi) \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-\pi} (\sin \pi + \cos \pi) + \frac{1}{2} e^{\pi} (-\sin \pi + \cos \pi) \\
 &= \underline{\frac{1}{2} (e^{-\pi} - e^{\pi})} \quad \cdots \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

Aに入っているメダルはすべて区別する。
このとき Aに入っている 3 枚のメダルの色の決め方は、全部で
 $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ 通り
であり、すべて同様に確からしい。
同様に Bに入っている 2 枚のメダルの色の決め方は、全部で
 $2 \cdot 2 = 4$ 通り
であり、すべて同様に確からしい。

(1) 2 種類の色の選び方は、 ${}_3C_2 = 3$ 通り
選んだ色のうち、どちらが 2 枚になるかで ${}_2C_1 = 2$ 通り
さらにどのメダルが同じ色になるかで ${}_3C_2 = 3$ 通り
よって、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2)
(i) 2 種類のメダルの色が金、銀のとき
A のメダルの色はそれぞれ金か銀の 2 通り
B のメダルの色もそれぞれ金か銀の 2 通り
このうちすべてが金、すべてが銀の 2 通りは不適なので、
 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) - 2 = 30$ 通り

(ii) 2 種類のメダルの色が金、銅のとき
A のメダルの色はそれぞれ金か銅の 2 通り
B のメダルの色はそれぞれ金の 1 通り
このうちすべてが金の 1 通りは不適なので、
 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1) - 1 = 7$ 通り

(iii) 2 種類のメダルの色が銀、銅のとき
(ii)と同様に考えて
 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1) - 1 = 7$ 通り

以上(i)(ii)(iii)より、求める確率は、
 $\frac{30 + 7 + 7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{44}{27 \cdot 4} = \frac{11}{27} \quad \cdots \cdots (\text{答})$

(3) メダルはすべて区別することに注意すると、
A、B を合わせてちょうど 3 枚の金メダルが入っている。
組み合わせとそれぞれの場合の数は下表のとおり。

パターン	A	B	場合の数
①	金, 金, 金	銀, 銀	$1 \cdot 1 = 1$
②	金, 金, 銀	金, 銀	$3 \cdot 2 = 6$
③	金, 金, 銅	金, 銀	$3 \cdot 2 = 6$
④	金, 銀, 銀	金, 金	$3 \cdot 1 = 3$
⑤	金, 銀, 銅	金, 金	$6 \cdot 1 = 6$
⑥	金, 銅, 銅	金, 金	$3 \cdot 1 = 3$

パターン①～⑥の 25 通りのうち、A のメダルの色が 2 種類なのは、
パターン②、③、④、⑥の $6 + 6 + 3 + 3 = 18$ 通りなので、求める条件付きの確率は、

$$\frac{18}{25} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ とおくと,

方程式①の実数解の個数は $y = f(x)$ と x 軸との共有点の個数と一致する.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0$$

とおくと,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

ここで, $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \beta = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ とおくと,

$y = f(x)$ の増減は下表のとおり.

x	$-\infty$		α		β		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞

$$f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) + \left(-\frac{14}{9}x - \frac{7}{9} \right)$$

なので,

$$\begin{aligned} f(\alpha) \cdot f(\beta) &= \left(-\frac{14}{9}\alpha - \frac{7}{9} \right) \cdot \left(-\frac{14}{9}\beta - \frac{7}{9} \right) \quad (f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \text{ より}) \\ &= \frac{49}{81}(2\alpha + 1)(2\beta + 1) \\ &= \frac{49}{81}\{4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1\} \\ &= \frac{49}{81}\left\{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\} \\ &= -\frac{49}{27} < 0 \end{aligned}$$

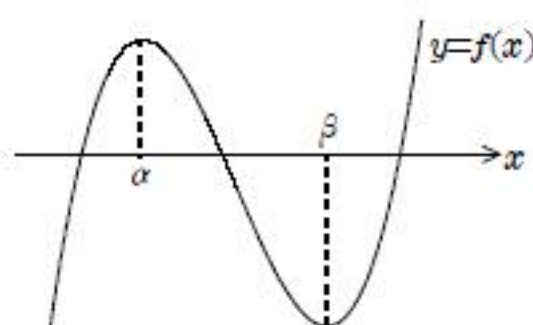
つまり, 極大値と極小値は異符号の値をとる.

よって, $y = f(x)$ と x 軸は相異なる 3 つの共有点をもつ.

また, $f(0) \neq 0$ であることから, 方程式①は異なる 3 つの 0 で

ない実数解をもつ.

(証明終)



- (2)

$$\begin{aligned} & a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \\ &= \left\{ \frac{s^{n+2}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+2}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+2}}{(u-s)(u-t)} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{s^{n+1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+1}}{(u-s)(u-t)} \right\} \\ &- 2 \left\{ \frac{s^n}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^n}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^n}{(u-s)(u-t)} \right\} \\ &- \left\{ \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \right\} \\ &= \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}(s^3 + s^2 - 2s - 1) + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}(t^3 + t^2 - 2t - 1) + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}(u^3 + u^2 - 2u - 1) \end{aligned}$$

ここで, s, t, u は方程式①の実数解なので,

$$\begin{cases} s^3 + s^2 - 2s - 1 = 0 \\ t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 \\ u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0 \end{cases}$$

これらを代入すると,

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$$

(証明終)

- (3) すべての自然数 n で

「 a_n がすべて整数である」

ことを数学的帰納法を用いて証明する.

- (I) $n = 1, 2, 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(s-t)(s-u)} + \frac{1}{(t-u)(t-s)} + \frac{1}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-(t-u) - (u-s) - (s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= 0 \\ a_2 &= \frac{s}{(s-t)(s-u)} + \frac{t}{(t-u)(t-s)} + \frac{u}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-s(t-u) - t(u-s) - u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= 0 \\ a_3 &= \frac{s^2}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^2}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^2}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-s^2(t-u) - t^2(u-s) - u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= \frac{-(t-u)s^2 + (t+u)(t-u)s - tu(t-u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= \frac{-(t-u)\{s^2 - (t+u)s + tu\}}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= \frac{-(t-u)(s-t)(s-u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= \frac{(s-t)(t-u)(u-s)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり, 明らかに成立.

- (II) $n = k, k+1, k+2$ (ただし $k = 1, 2, 3, \dots$) のとき

a_k, a_{k+1}, a_{k+2} は整数であると仮定すると,

(2)の結果より,

$$a_{k+3} = -a_{k+2} + 2a_{k+1} + a_k$$

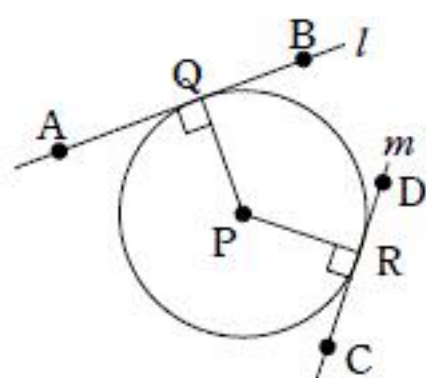
も整数となり,

$n = k+3$ のときも成立.

以上(I), (II) より, すべての自然数 n において a_n はすべて整数である.

(証明終)

(1)



$\overrightarrow{AQ} // \overrightarrow{AB}$ より, $\overrightarrow{AQ} = k \overrightarrow{AB}$ とおける. ただし k は実数.

これより,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k+2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0-s \\ k-t \\ k+2-a \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ -s \cdot 0 + (k-t) \cdot 1 + (k+2-a) \cdot 1 &= 0 \\ k &= \frac{t+a-2}{2}\end{aligned}$$

よって, $\underline{Q\left(0, \frac{t+a-2}{2}, \frac{t+a+2}{2}\right)}$ (答)

$\overrightarrow{CR} // \overrightarrow{CD}$ より, $\overrightarrow{CR} = k' \overrightarrow{CD}$ (ただし, k' は実数)とおけて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OC} + k' \overrightarrow{CD} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1-s \\ 0-t \\ k'-a \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CD} &= 0 \\ (1-s) \cdot 0 + (-t) \cdot 0 + (k'-a) \cdot 1 &= 0 \\ k' &= a\end{aligned}$$

よって, $\underline{R(1, 0, a)}$ (答)

(2) P を中心とする球面が l と m にともに接するとき, Q, R は接点なので,

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}|$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \begin{pmatrix} 0-s \\ \frac{t+a-2}{2}-t \\ \frac{t+a+2}{2}-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ \frac{-t+a-2}{2} \\ \frac{t-a+2}{2} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{PR} &= \begin{pmatrix} 1-s \\ 0-t \\ a-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

なので,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PR}|^2 \quad \text{より,}$$

$$(-s)^2 + \left(\frac{-t+a-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{t-a+2}{2}\right)^2 = (1-s)^2 + (-t)^2 + 0^2$$

$$\underline{t^2 + 2(a-2)t - 4s - a^2 + 4a - 2 = 0} \quad \text{.....(答)}$$

(3) (2)の結果より,

$$\{t + (a-2)\}^2 - (a^2 - 4a + 4) - 4s - a^2 + 4a - 2 = 0$$

$$\{t - (2-a)\}^2 = 4 \left\{ s - \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{3}{2} \right) \right\}$$

よって, (s, t) の軌跡は

$$\text{放物線 } t^2 = 4 \cdot 1 \cdot s \quad (\text{焦点}(1, 0), \text{準線 } s = -1)$$

を s 軸方向に $-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{3}{2}$, t 軸方向に $2-a$ だけ平行移動した放物線である.

(証明終了)

また, 焦点は,

$$\begin{aligned}&\left(1 + \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{3}{2} \right), 0 + (2-a) \right) \\ &= \underline{\left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{1}{2}, 2-a \right)} \quad \text{.....(答)}\end{aligned}$$

準線は

$$\begin{aligned}s &= -1 + \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{3}{2} \right) \\ &= \underline{-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{5}{2}} \quad \text{.....(答)}\end{aligned}$$

である.