

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a - (k^2 + 2k - 1) &= \{(n+k)^2 - n(n+1)\} - (k^2 + 2k - 1) \\
 &= \cancel{n^2} + 2nk + \cancel{k^2} - \cancel{n^2} - n - \cancel{k^2} - 2k + 1 \\
 &= (2k-1)n - (2k-1) \\
 &= (2k-1)(n-1) \geq 0 \quad (\because k=1, 2, 3, \dots, n=1, 2, 3, \dots) \\
 \therefore a &\geq k^2 + 2k - 1
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad n(n+1) + 7 > n^2$$

は明らかなので、

$$n(n+1) + 7 = (n+k)^2 \quad \dots\dots ①$$

とおける。

(1)の不等式で、 $a=7$ とおくと、

$$7 \geq k^2 + 2k - 1$$

$$k^2 + 2k - 8 \leq 0$$

$$(k+4)(k-2) \leq 0$$

とおける。

k は自然数なので、 $k=1, 2$

$k=1$ のとき ①より、 $n=6$

$k=2$ のとき ①より、 $n=1$

$n=1$ と $n=6$ は確かに題意を満たす。

$$\begin{aligned}
\boxed{2} \quad & \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ} \text{ より,} \\
& \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \\
& (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a})(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{a}) = 0 \\
& \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + |\overrightarrow{a}|^2 = 0 \\
& \therefore \overrightarrow{a}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + r^2 \quad (\because |\overrightarrow{a}| = r) \dots\dots ①
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} \text{ より,} \\
\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\
\therefore \overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) \quad \dots\dots ②
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & |\overrightarrow{AR}|^2 = |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA}|^2 \\
& = \left| \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) - \overrightarrow{a} \right|^2 \\
& = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{p}|^2 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2) - \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + |\overrightarrow{a}|^2 \\
& = \frac{1}{4}(1 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 1) - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + r^2) + r^2 \quad (\because ①, |\overrightarrow{p}| = |\overrightarrow{q}| = 1) \\
& = \frac{1}{2}(1 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \overrightarrow{OB} = k \overrightarrow{OA} \\
& = k \overrightarrow{a}
\end{aligned}$$

とおく. (ただし, k は実数)

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BR}|^2 &= |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB}|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) - k \overrightarrow{a} \right|^2 \quad (\because ②) \\
&= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{p}|^2 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2) - k \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + k^2 |\overrightarrow{a}|^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 1) - k(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + r^2) + k^2 r^2 \quad (\because ①) \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - k\right) \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + (k^2 - k)r^2 \quad \dots\dots ③
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} - k = 0$$

すなわち, 点 B が OA の中点のとき, $|\overrightarrow{BR}|^2$ は 2 点 P, Q の位置によらず一定となる.

このとき, $k = \frac{1}{2}$ を③に代入して,

$$|\overrightarrow{BR}|^2 = \frac{1}{4}(2 - r^2)$$

- (1) 点 P が $n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは,
 n 秒後に頂点 A にいて, 留まるか,
 n 秒後に頂点 A にいなくて, 移動するか,
 のいずれかなので,

$$p_{n+1} = p_n \cdot (1-a) + (1-p_n) \cdot \frac{a}{3}$$

$$\therefore p_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)p_n + \frac{a}{3}$$

- (2) (1)で求めた漸化式は,

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

と変形できる.

よって, 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は, 初項 $\left(p_0 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 公比 $\left(1 - \frac{4}{3}a\right)$ の等比数列なので,

(ただし, p_0 は 0 秒のとき点 P が頂点 A にいる確率とする. $p_0 = 1$)

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n$$

$$p_n = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n + \frac{1}{4} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$(1) \quad A = \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \cdots \cdots ①$$

とおくと,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + A \quad \cdots \cdots ②$$

②を①に代入すると,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{3}t^3 - at^2 + (a^2 - b)t + A \right\} dt \\ &= 2 \int_0^1 (-at^2 + A) dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}at^3 + At \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}a + 2A \\ \therefore A &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

よって, ②に $x=0$ を代入して,

$$\begin{aligned} f(0) &= A \\ &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(x) = x^2 - 2ax + (a^2 - b)$$

$f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つためには,

$$x^2 - 2ax + (a^2 - b) = 0$$

が $x > 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもたなくてはならない.

よって, 求める条件は,

$$\begin{cases} f'(1) > 0 \\ f'(a) < 0 \\ 1 < a \end{cases}$$

がすべて成立することである.

$$\therefore \begin{cases} b < (a-1)^2 \\ b > 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

また, 点 $P(a, b)$ の存在範囲は図の斜線部.

(ただし, 境界線を含まず)

