

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a - (k^2 + 2k - 1) &= \{(n+k)^2 - n(n+1)\} - (k^2 + 2k - 1) \\
 &= \cancel{n^2} + 2nk + \cancel{k^2} - \cancel{n^2} - n - \cancel{k^2} - 2k + 1 \\
 &= (2k-1)n - (2k-1) \\
 &= (2k-1)(n-1) \geq 0 \quad (\because n, k \text{ は自然数}) \\
 \therefore a &\geq k^2 + 2k - 1
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad n(n+1) + 14 > n^2$$

は明らかなので,

$$n(n+1) + 14 = (n+k)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける.

(1)の不等式で, $a=14$ とおくと,

$$14 \geq k^2 + 2k - 1$$

$$(k+5)(k-3) \leq 0$$

とおける.

k は自然数なので, $k=1, 2, 3$

$k=1$ のとき ①より, $n=13$

$k=2$ のとき ①より, $n=\frac{10}{3}$ (不適)

$k=3$ のとき ①より, $n=1$

よって, 求める自然数 n は $n=1, 13$ で,

これらは題意を満たす.

(1) $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - \{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)\} \\ &= x \sin x \end{aligned}$$

増減表は下表のとおり.

x	0	π	2π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1 ↗	$1+\pi$	↘ $1-2\pi$

増減表より,

$$\text{最大値} = f(\pi) = 1 + \pi$$

$$\text{最小値} = f(2\pi) = 1 - 2\pi$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int x \cos x dx &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 \quad (\text{ただし, } C_1 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= x - \cos x - (x \sin x + \cos x) + C \\ &= x - 2 \cos x - x \sin x + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(3) 増減表と $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \{-f(x)\} dx \\ &= [x - 2 \cos x - x \sin x]_0^{\frac{3}{2}\pi} + [x - 2 \cos x - x \sin x]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \\ &= \left(\frac{3}{2}\pi \cdot 2 - 0 - 2\pi\right) - 2(0 \cdot 2 - 1 - 1) - \left\{\frac{3}{2}\pi \cdot (-1) \cdot 2 - 0 - 0\right\} \\ &= 4\pi + 4 \end{aligned}$$

(1) 点 P は, $\triangle OAB$ の外心なので,

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{BP}|$$

$$|z| = |z - \beta|$$

$z = \alpha\beta$ より,

$$|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta|$$

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha - 1| \cdot |\beta|$$

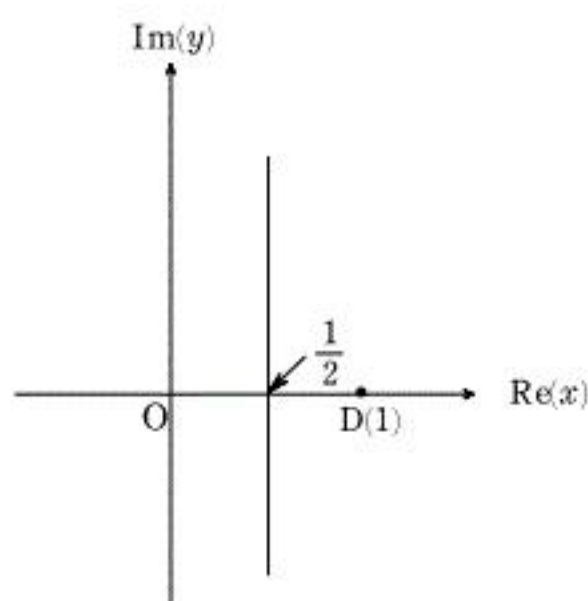
$\beta \neq 0$ より,

$$|\alpha| = |\alpha - 1|$$

点 D(1) とおくと,

点 A(α) は, 点 O(0), 点 D(1) から等距離の点の集合.

すなわち, 点 A(α) は線分 OD の垂直二等分線を描く.



(2) (1) と同様にして,

$$|\beta| = |\beta - 1|$$

点 B(β) も線分 OD の垂直二等分線上を動く.

$\alpha \neq \beta$ より,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + ai \\ \beta = \frac{1}{2} + bi \end{cases}$$

とおける. (ただし, a, b は実数で, $a \neq b$)

$z = X + Yi$ (X, Y は実数) とおくと,

$$\alpha\beta = z$$

なので,

$$\left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right) = X + Yi$$

$$\left(\frac{1}{4} - ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i = X + Yi$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{4} - ab = X \\ \frac{1}{2}(a+b) = Y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} ab = \frac{1}{4} - X \\ a+b = 2Y \end{cases}$$

よって, a, b は t の 2 次方程式

$$t^2 - 2Yt + \left(\frac{1}{4} - X\right) = 0$$

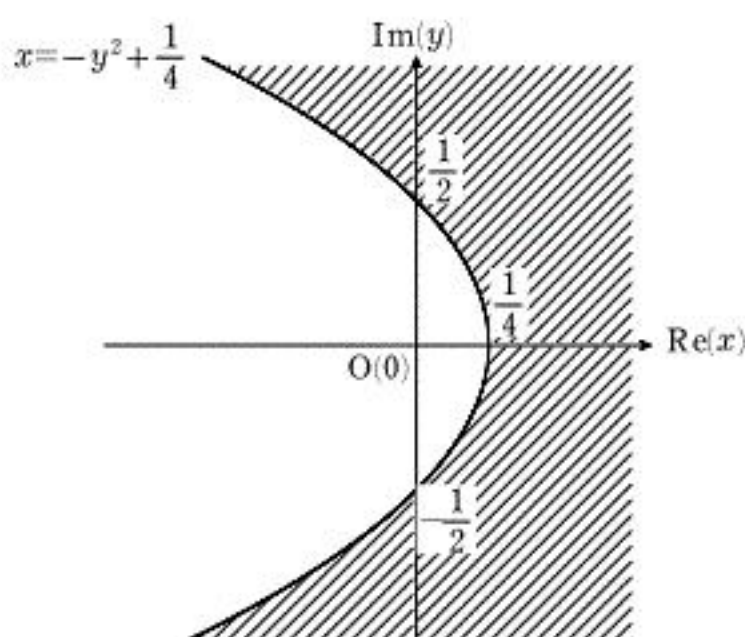
の異なる 2 つの解である.

ここで, 判別式を D とおくと,

$$D/4 = (-Y)^2 - 1 \cdot \left(\frac{1}{4} - X\right) > 0$$

$$\therefore X > -Y^2 + \frac{1}{4}$$

ゆえに点 P(z) の存在範囲は, 図の斜線部. (ただし, 境界線は含まず)



- (1) 10回の試行でゲームが終了するためには、
 1回目から9回目まで1の目が出続けて、
 10回目に1～6のいずれかの目が出るとよいので、

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{6}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

- (2) 9回の試行でゲームが終了するためには、
 1回目から8回目まで1の目が出続けて、
 9回目に2以上のいずれかの目が出るか、
 1回目から8回目までに1の目が7回と2の目が1回出て、
 9回目に1～6のいずれかの目が出るとよいので、

$$\begin{aligned} p_9 &= \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \frac{5}{6} + \left[{}_8C_7 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \right] \cdot \frac{6}{6} \\ &= \frac{5+48}{6^9} \\ &= \frac{53}{6^9} \end{aligned}$$

- (3) 1回目の目、2回目の目、3回目の目を、それぞれ x_1, x_2, x_3 とおく。
 1回目の目 x_1 と2回目の目 x_2 と、
 2回目の試行後の点Pの位置は下表のとおり、

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3回目の試行でゲームが終了するのは、

$x_1 + x_2 = 4$ かつ $x_3 = 6$ のとき

$x_1 + x_2 = 5$ かつ $x_3 = 5$ か 6 のとき

$x_1 + x_2 = 6$ かつ $x_3 = 4$ か 5 か 6 のとき

$x_1 + x_2 = 7$ かつ $x_3 = 3$ か 4 か 5 か 6 のとき

$x_1 + x_2 = 8$ かつ $x_3 = 2$ か 3 か 4 か 5 か 6 のとき

$x_1 + x_2 = 9$ かつ $x_3 = 1$ か 2 か 3 か 4 か 5 か 6 のとき

のいずれかの場合なので、

求める確率は、

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

5 $P(x, y)$ とおく.

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a \text{ より,}$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq a$$

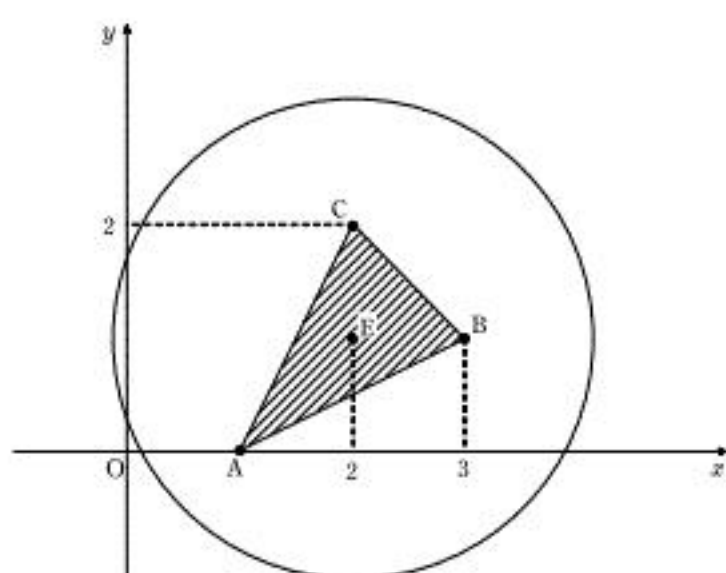
$$\therefore D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{a-4}{3} \dots\dots ①$$

(1) ①が成立するとよいので,

$$\frac{a-4}{3} \geq 0$$

$$\therefore a \geq 4$$

(2)



領域 T は図の斜線部.

$a \geq 0$ のとき, ①は中心 $E(2, 1)$, 半径 $\sqrt{\frac{a-4}{3}}$ の円をあらわす

(ただし, $a=4$ のときは点 $E(2, 1)$ をあらわす)ので,

円が $\triangle ABC$ を完全に含むような a の範囲を求めるとよい.

$$EA = \sqrt{2}, EB = EC = 1$$

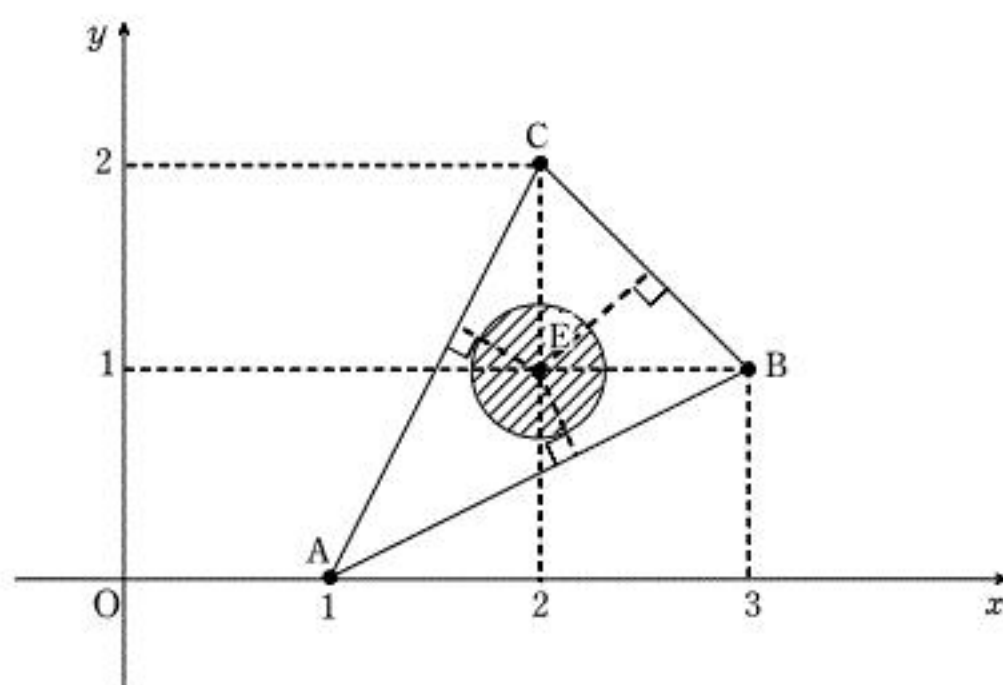
なので,

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geq EA = \sqrt{2}$$

となるとよい.

$$\therefore a \geq 10$$

(3)



(1)より, $a \geq 4$ であることが必要.

$$E(2, 1) \text{ から } AB: x-2y-1=0 \text{ への距離は, } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$E(2, 1) \text{ から } BC: x+y-4=0 \text{ への距離は, } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(2, 1) \text{ から } CA: 2x-y-2=0 \text{ への距離は, } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって, ①の半径 $\sqrt{\frac{a-4}{3}}$ が $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 以下になるとき,

D は T に含まれる.

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a \leq \frac{23}{5}$$

$a \geq 4$ とあわせて,

$$4 \leq a \leq \frac{23}{5}$$