

数 学

(数Ⅰ，数Ⅱ，数A，数B)

9：00～10：30

注 意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。

3. 解答用紙は
- | |
|--------|
| 解答用紙番号 |
| 数学0—1 |
- (問1用)，
- | |
|--------|
| 解答用紙番号 |
| 数学0—2 |
- (問2用)，
- | |
|--------|
| 解答用紙番号 |
| 数学0—3 |
- (問3用)，
- | |
|--------|
| 解答用紙番号 |
| 数学0—4 |
- (問4用)

の4枚である。

4. 解答用紙は4枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

1 自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して、 $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき、

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 平面上の点 O を中心とする半径1の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上に2点 P, Q が条件 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $|\vec{a}| = r$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする。ただし、 $0 < r < 1$ とする。

(1) $|\overrightarrow{AR}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OA 上の点 B で、 $|\overrightarrow{BR}|^2$ が2点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また、このときの $|\overrightarrow{BR}|^2$ の値を r を用いて表せ。

3 正四面体 $ABCD$ の頂点を移動する点 P がある。点 P は、1秒ごとに、隣の3頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか、もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が、 n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし、 $0 < a < 1$ とし、 n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。

4 a, b を実数とし、関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

を満たすとする。

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また、点 $P(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。