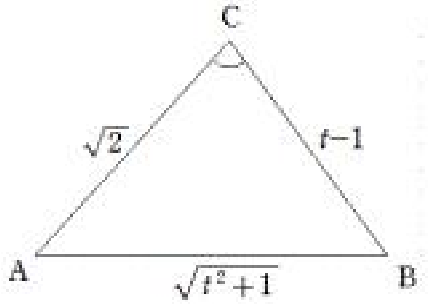
$\boxed{1}$

(1)　余弦定理より，



$$\cos\angle ACB=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+(t-1)^2-\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2}{2\sqrt{2}(t-1)}$$

$$=\frac{-2(t-1)}{2\sqrt{2}(t-1)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

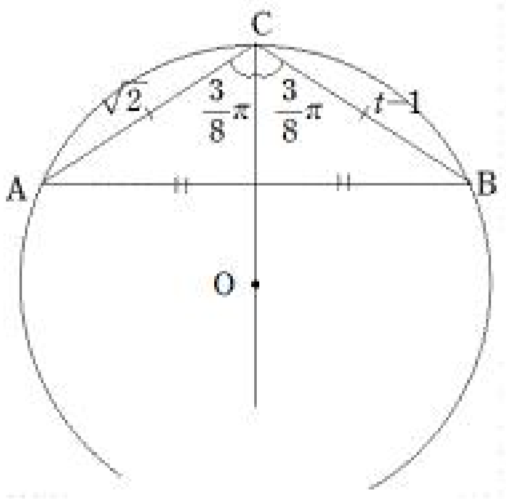
$$\therefore\ \angle ACB=\frac{3}{4}\pi$$

(2)　$CO\perp AB$ のとき，$\triangle ABC$ は図のような二等辺三角形となるので，

$$AC=BC$$

$$\sqrt{2}=t-1$$

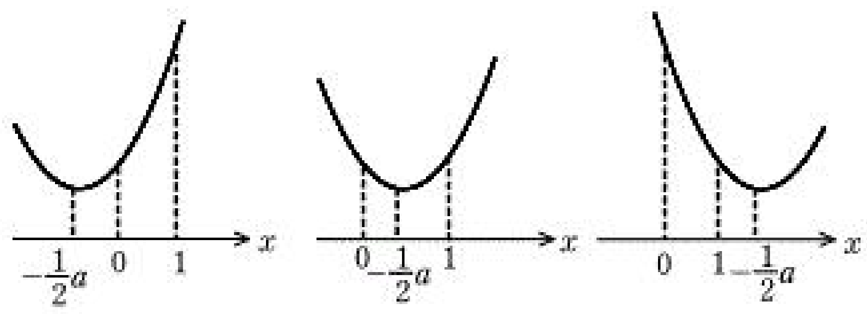
$$\therefore\ t=\sqrt{2}+1$$



$\boxed{2}$

(1)

$$f(x)=x^2+ax+b$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2+b \text{（ただし，}0\leqq x\leqq 1\text{）}$$



(i) $-\frac{1}{2}a\leqq 0$ のとき，つまり，$a\geqq 0$ のとき

$$m=f(0)=b$$

(ii) $0\leqq -\frac{1}{2}a\leqq 1$ のとき，つまり，$-2\leqq a\leqq 0$ のとき

$$m=f\left(-\frac{1}{2}a\right)=-\frac{1}{4}a^2+b$$

(iii) $1\leqq -\frac{1}{2}a$ のとき，つまり，$a\leqq -2$ のとき

$$m=f(1)=1+a+b$$

(2)　$a+2b\leqq 2$ より，　$b\leqq -\frac{1}{2}a+1$ なので，

(i) $a\geqq 0$ のとき

$$m=b\leqq -\frac{1}{2}a+1$$

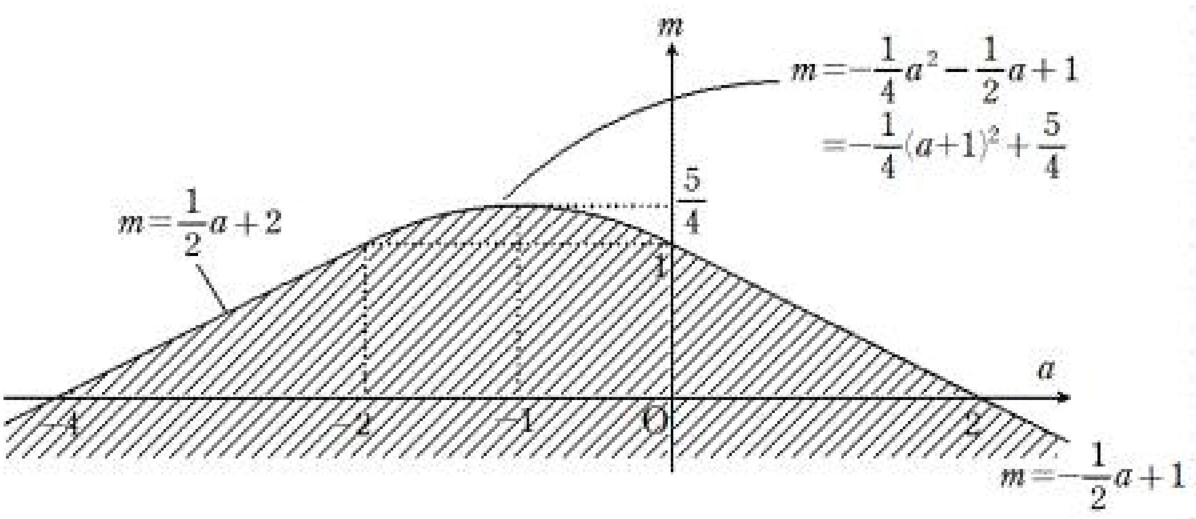
(ii) $-2\leqq a\leqq 0$ のとき

$$m=-\frac{1}{4}a^2+b\leqq -\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a+1$$

(iii) $a\leqq -2$ のとき

$$m=1+a+b\leqq 1+a+\left(-\frac{1}{2}a+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}a+2$$

(i)，(ii)，(iii)のあらわす領域は図の斜線部．（ただし，境界線を含む）



図より，$a=-1$ のとき

$$m\text{ の最大値}=\frac{5}{4}$$

このとき，　$b=-\frac{1}{2}a+1$ より，

$$b=\frac{3}{2}$$

以上より，　$a=-1$，$b=\frac{3}{2}$ のとき

$$m\text{ の最大値}=\frac{5}{4}$$

である．

$\boxed{3}$

(1) サイコロの目の出方の総数は，

$6\cdot 6\cdot 6$ 通り

(i) 3つのサイコロの目が5以上になるのとき

$2\cdot 2\cdot 2=8$ 通り

(ii) 2つのサイコロの目が5以上になるのとき

どの2つのサイコロを選ぶかで ${}_3C_2=3$ 通り

2つのサイコロが5か6の目，1つのサイコロが4以下の目を出すので，

$2\cdot 2\cdot 4=16$ 通り

$\therefore\ 3\cdot 16=48$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{8+48}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{7}{27}$$

(2) $s>t>u$ より，

$$100R+10B+Y>100B+10Y+R>100Y+10R+B$$

①より，

$$R>\frac{10B+Y}{11}$$

②より，

$$R<11B-10Y$$

$$\therefore\ \frac{10B+Y}{11}<R<11B-10Y \quad \cdots\cdots③$$

よって，

$$\frac{10B+Y}{11}<11B-10Y$$

$$Y<B$$

であることが必要．

これと③より，

(B,Y)	$\frac{10B+Y}{11}$	$11B-10Y$	R	
$(2,1)$	$\frac{21}{11}$	12	2, 3, 4, 5, 6	15個
$(3,1)$	$\frac{31}{11}$	23	3, 4, 5, 6	
$(4,1)$	$\frac{41}{11}$	34	4, 5, 6	
$(5,1)$	$\frac{51}{11}$	45	5, 6	
$(6,1)$	$\frac{61}{11}$	56	6	
$(3,2)$	$\frac{32}{11}$	13	3, 4, 5, 6	10個
$(4,2)$	$\frac{42}{11}$	24	4, 5, 6	
$(5,2)$	$\frac{52}{11}$	35	5, 6	
$(6,2)$	$\frac{62}{11}$	46	6	
$(4,3)$	$\frac{43}{11}$	14	4, 5, 6	6個
$(5,3)$	$\frac{53}{11}$	25	5, 6	
$(6,3)$	$\frac{63}{11}$	36	6	
$(5,4)$	$\frac{54}{11}$	15	5, 6	3個
$(6,4)$	$\frac{64}{11}$	26	6	
$(6,5)$	$\frac{65}{11}$	16	6	1個

ゆえに，求める確率は

$$\frac{15+10+6+3+1}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{35}{216}$$

(2) 別解

(i) $R>B>Y$ のとき

$100R>100B>100Y$ となり，$s>t>u$ を満たす．

これは6個の目から3個の目を選び，大きい順に並べる場合の数と同じなので，

${}_6C_3=20$ 通り

(ii) $R=B>Y$ のとき

$100R+10B>100B+10Y>100Y+10R$ となり，$s>t>u$ を満たす．

これは6個の目から2個の目を選び，大きい順に並べる場合の数と同じなので，

${}_6C_2=15$ 通り

(iii) $R>B=Y$ のとき

$100R+10B>100B+10Y<100Y+10R$ となり，$s>t>u$ を満たさず，不適．

(iv) $R=B=Y$ のとき

$s=t=u$ となり，不適．

また，$s>t$ で $R<B$，$t>u$ で $B<Y$ となることはない．

ゆえに，求める確率は

$$\frac{20+15}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{35}{216}$$

$\boxed{4}$

(1) $\begin{cases} y = x^3 + px^2 + x \\ y = x^2 \end{cases}$

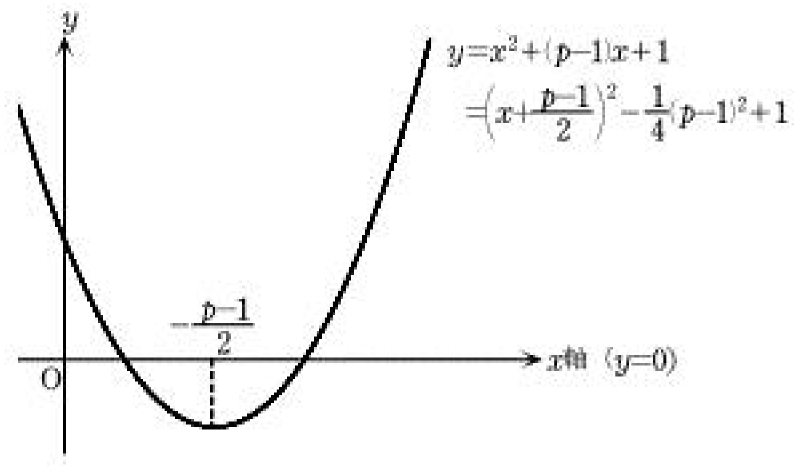
共通点の x 座標は

$$x^3 + px^2 + x = x^2$$

この方程式の実数解.

$$x\{x^2 + (p-1)x + 1\} = 0$$
$$x = 0,\ x^2 + (p-1)x + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$x > 0$ の範囲に実数解を 2 個もつためには,
$y = f(x) = x^2 + (p-1) + 1$ と x 軸 $(y = 0)$ が $x > 0$ に共有点を 2 個もつような
p の値の範囲を求めるとよい.

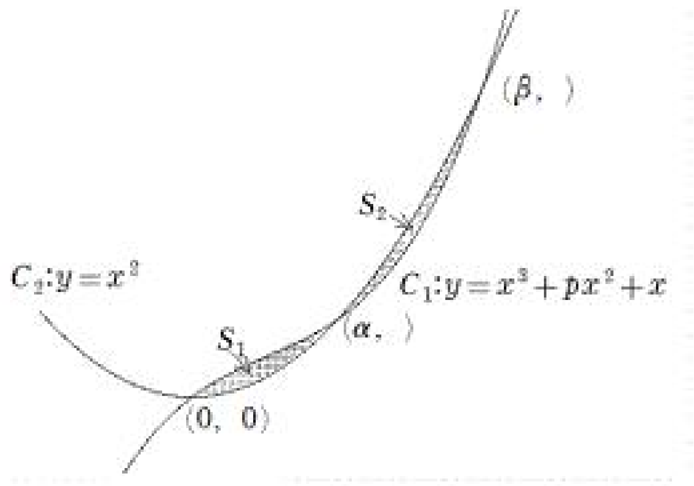


$$\begin{cases} 0 < -\dfrac{p-1}{2} \\ f(0) = 1 > 0 \quad (p \text{ の値に関わらず成立}) \\ f\left(-\dfrac{p-1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}(p-1)^2 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p < 1 \\ p < -1,\ 3 < p \end{cases}$$

$$\therefore\ p < -1$$

(2)



$S_1 = S_2$ より,

$$\int_0^\alpha \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx = \int_\alpha^\beta \{x^2 - (x^3 + px^2 + x)\}dx$$
$$\int_0^\alpha \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx + \int_\alpha^\beta \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx = 0$$
$$\int_0^\beta \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx = 0$$
$$\frac{1}{4}\beta^4 + \frac{1}{3}(p-1)\beta^3 + \frac{1}{2}\beta^2 = 0$$
$$\therefore\ 3\beta^4 + 4(p-1)\beta^3 + 6\beta^2 = 0$$

$\beta > 0$ より,

$$3\beta^2 + 4(p-1)\beta + 6 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

また, β は方程式①の実数解なので,

$$\beta^2 + (p-1)\beta + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

②—4×③より,

$$-\beta^2 + 2 = 0$$

$\beta > 0$ より,

$$\beta = \sqrt{2}$$

③に代入して,

$$2 + \sqrt{2}(p-1) + 1 = 0$$
$$\therefore\ p = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

このとき,

$$S_1 = \int_0^\alpha \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx$$
$$= \frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{1}{3}(p-1)\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2$$

①に解と係数の関係を用いると,

$$\alpha\beta = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{\beta}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので,

$$S_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left\{\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right\}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{16}$$