

1

$$(1) \quad \left| \vec{p} \right|^2 = (1-t)^2 \left| \vec{OA} \right|^2 + 2(1-t)t \vec{OA} \cdot \vec{OB} + t^2 \left| \vec{OB} \right|^2$$

ここで,

$$\begin{cases} \left| \vec{OA} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2} = 1 \\ \left| \vec{OB} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \\ \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \left| \vec{p} \right|^2 &= (1-2t+t^2) + t^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 1 \\ \therefore \left| \vec{p} \right| &= \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \end{aligned}$$

$$\left| \vec{q} \right|^2 = (1-s)^2 \left| \vec{OC} \right|^2 + 2(1-s)s \vec{OC} \cdot \vec{OD} + s^2 \left| \vec{OD} \right|^2$$

ここで,

$$\begin{cases} \left| \vec{OC} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \left| \vec{OD} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \vec{OC} \cdot \vec{OD} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \left| \vec{q} \right|^2 &= 2(1-2s+s^2) + 2s^2 \\ &= 4s^2 - 4s + 2 \\ \therefore \left| \vec{q} \right| &= \sqrt{4s^2 - 4s + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (1-t)(1-s) \vec{OA} \cdot \vec{OC} + (1-t)s \vec{OA} \cdot \vec{OD} \\ &\quad + t(1-s) \vec{OB} \cdot \vec{OC} + ts \vec{OB} \cdot \vec{OD} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 = 0 \\ \vec{OA} \cdot \vec{OD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 = 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0 + 0 - 1 = -1 \\ \vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0 + 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= -t(1-s) - ts \\ &= -t \end{aligned}$$

(2) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ なので,

$$\begin{aligned} \cos \frac{3}{4}\pi &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\left| \vec{p} \right| \left| \vec{q} \right|} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{4s^2 - 4s + 2}} \quad \left(\because t = \frac{1}{2} \right) \\ \therefore \sqrt{4s^2 - 4s + 2} &= 1 \end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} 4s^2 - 4s + 2 &= 1 \\ (2s-1)^2 &= 0 \\ s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left| \vec{p} - \vec{q} \right|^2 &= \left| \vec{p} \right|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \left| \vec{q} \right|^2 \\ &= (2t^2 - 2t + 1) - 2 \cdot (-t) + (4s^2 - 4s + 2) \\ &= 2t^2 + 4s^2 - 4s + 3 \\ &= 2t^2 + 4 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \geq 2 \quad \left(\text{等号は } t=0, s=\frac{1}{2} \text{ で成立} \right) \end{aligned}$$

よって, $s = \frac{1}{2}, t = 0$ のとき,

$$\left| \vec{p} - \vec{q} \right| \text{ の最小値 } = \sqrt{2}$$

- (1) $z = x + yi$ (ただし, x, y は実数) とおく.

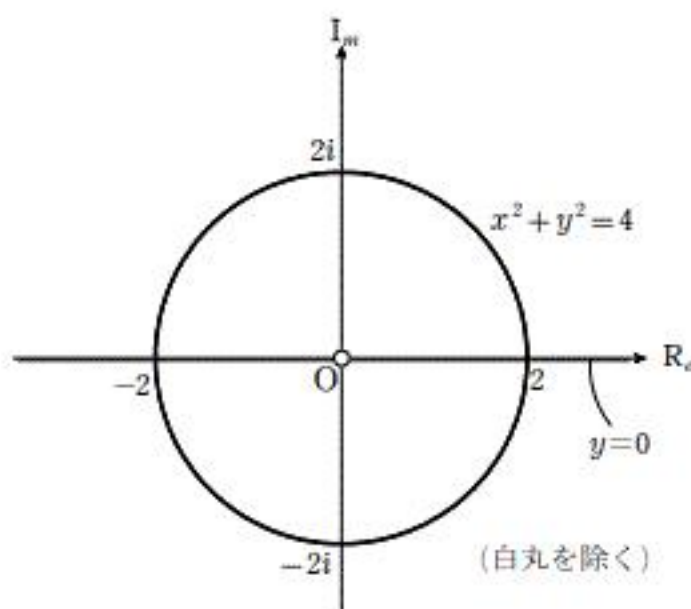
$$\begin{aligned} z + \frac{4}{z} &= x + yi + \frac{4}{x + yi} \\ &= x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2} \\ &= x \left(1 + \frac{4}{x^2 + y^2} \right) + y \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) i \end{aligned}$$

これが実数となるためには,

$$\begin{aligned} y \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) &= 0 \\ y = 0 \quad \text{または} \quad 1 - \frac{4}{x^2 + y^2} &= 0 \\ y = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

ただし, $z \neq 0$ なので $(x, y) \neq (0, 0)$

よって, 複素数 z の全体 D は下図の通り.



- (2) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$\begin{aligned} k \left(z + \frac{4}{z} + 8 \right) &= i \left(z - \frac{4}{z} \right) \\ k \left\{ x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2} + 8 \right\} &= i \left\{ x + yi - \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2} \right\} \\ k \left(x + 8 + \frac{4x}{x^2 + y^2} \right) + ky \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) i &= -y \left(1 + \frac{4}{x^2 + y^2} \right) + x \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) i \end{aligned}$$

k, x, y は実数なので,

$$\begin{cases} k \left(x + 8 + \frac{4x}{x^2 + y^2} \right) = -y \left(1 + \frac{4}{x^2 + y^2} \right) \\ ky \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) = x \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) \end{cases}$$

z は D に属するので,

- (i) $y = 0$ のとき

$$\begin{cases} k \left(x + 8 + \frac{4}{x} \right) = 0 & \dots\dots ① \\ 0 = x \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) & \dots\dots ② \end{cases}$$

②より, $x = \pm 2$

このとき, $x + 8 + \frac{4}{x} \neq 0$ なので, ①より, $k = 0$

- (ii) $x^2 + y^2 = 4$ のとき

$$\begin{cases} k(2x + 8) = -2y & \dots\dots ③ \\ k \cdot 0 = 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

④は任意の k で成立.

さらに, ③より,

$$kx + y + 4k = 0$$

求める k の範囲は

$$\begin{cases} \text{直線} : kx + y + 4k = 0 \\ \text{円} : x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

が共有点をもつ範囲なので,

$$\begin{aligned} \frac{|k \cdot 0 + 0 + 4k|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} &\leq 2 \\ \sqrt{k^2 + 1} &\geq |k| \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} 4k^2 &\leq k^2 + 1 \\ (\sqrt{3}k + 1)(\sqrt{3}k - 1) &\leq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} &\leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

以上(i), (ii)より, 求める k の範囲は

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(1) \quad \begin{cases} n=1000a+100b+10c+d \\ m=a+b+c+d \end{cases} \quad \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} n-m &= 999a+99b+9c \\ &= 9(111a+11b+c) \end{aligned}$$

$111a+11b+c$ は整数なので、 $n-m$ は 9 の倍数である。

すなわち、 n と m を 9 で割ったときの余りは等しい。

よって、 n が 9 の倍数になることと、 m が 9 の倍数になることは同値である。

(2) 同じ数字のカードを区別して考える。

0, 0, 1, 1, 2, 2, 8, 8 の 8 枚から 4 枚を取り出して横一列に並べるとき、
並べ方の総数は

$${}_8C_4 \cdot 4! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

並べたカードの数字を左から a, b, c, d とする。

(1) より、 n が 9 の倍数になることと、 m が 9 の倍数であることは同じなので、
 m が 9 の倍数となる場合の数を考える。

$$\begin{cases} m \text{ の最小値} = 0+0+1+1=2 \\ m \text{ の最大値} = 8+8+2+2=20 \end{cases}$$

なので、 m が 9 の倍数となるのは $m=9$ または $m=18$ のときである。

(i) $m=9$ のとき

a, b, c, d の組み合わせは

$$(0, 0, 1, 8)$$

カードの選び方は

$${}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 4 \quad (\text{通り})$$

(ii) $m=18$ のとき

a, b, c, d の組合せは

$$(1, 1, 8, 8), (0, 2, 8, 8)$$

カードの選び方は、それぞれ

$$\begin{cases} {}_2C_2 \cdot {}_2C_2 = 1 & \text{通り} \\ {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_2 = 4 & \text{通り} \end{cases}$$

カードの並べ方は、それぞれ $4!$ ずつあるので、求める確率は

$$\frac{\{4+(1+4)\} \cdot 4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{9}{70}$$

(3) n が偶数となるのは

一の位が 0 か 2 か 8 で各カードは 2 枚ずつあるから、

一の位のカードの選び方は

$${}_6C_1 = 6 \quad (\text{通り})$$

十の位、百の位、千の位のカードの選び方は、

残った 7 枚から 3 枚を選んで並べるとよいので、

$${}_7C_3 \cdot 3! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

よって、 n が偶数となる場合の数は

$$6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

n が偶数 かつ 9 の倍数となるのは、 a, b, c, d の組み合わせが

$(0, 0, 1, 8)$ のとき

カードの選び方が、

$${}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \quad (\text{通り})$$

一の位のカードの選び方は、偶数である 3 枚のうち 1 枚を選ぶとよいので、

$${}_3C_1 \quad \text{通り}$$

十の位、百の位、千の位のカードの選び方は、

残った 3 枚を並べるとよいので、

$${}_3C_3 \cdot 3! = 3! \quad (\text{通り})$$

$$\therefore ({}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1) \cdot {}_3C_1 \cdot 3! = 72 \quad (\text{通り})$$

$(1, 1, 8, 8)$ のとき

カードの選び方が、

$${}_2C_2 \cdot {}_2C_2 \quad (\text{通り})$$

一の位のカードの選び方は、偶数である 2 枚のうち 1 枚を選ぶとよいので、

$${}_2C_1 \quad (\text{通り})$$

十の位、百の位、千の位のカードの選び方は、

残った 3 枚を並べるとよいので、

$${}_3C_3 \cdot 3! = 3! \quad (\text{通り})$$

$$\therefore ({}_2C_2 \cdot {}_2C_2) \cdot {}_2C_1 \cdot 3! = 12 \quad (\text{通り})$$

$(0, 2, 8, 8)$ のとき

カードの選び方は、

$${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_2 \quad (\text{通り})$$

すべてのカードが偶数なので、並べ方に関わらず偶数となるので、

$$4! \quad \text{通り}$$

$$\therefore ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_2) \cdot 4! = 96 \quad (\text{通り})$$

ゆえに求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{72+12+96}{6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} &= \frac{180}{6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

(1) $BQ \geq OQ$ より,

$$\sqrt{(x-11)^2 + (y-11)^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

両辺を2乗して整理すると,

$$y \leq -x + 11$$

$OQ \geq 2AQ$ より,

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + y^2}$$

両辺を2乗して整理すると,

$$(x-10)^2 + y^2 \leq 5^2$$

また,

$$\begin{cases} y = -x + 11 \\ (x-10)^2 + y^2 = 5^2 \end{cases}$$

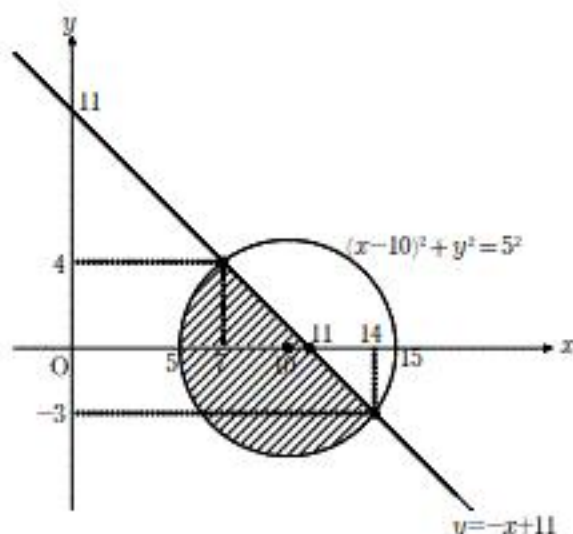
を連立すると,

$$(x, y) = (7, 4), (14, -3)$$

よって, 領域 D は図の斜線部.(ただし, 境界線を含む.)

また, $BQ = OQ = 2AQ$ となる点 Q の座標は

$$(7, 4), (14, -3)$$



(2) $OQ \geq PQ$ より,

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-p)^2 + (y-11)^2}$$

両辺を2乗して整理すると

$$y \geq -\frac{p}{11}x + \frac{p^2 + 121}{22} \quad \dots\dots ①$$

ここで, $0 < p \leq 11$ より, OP の垂直二等分線

$$y = -\frac{p}{11}x + \frac{p^2 + 121}{22}$$

の傾き $-\frac{p}{11}$ の範囲は,

$$-1 \leq -\frac{p}{11} < 0$$

よって, ①を満たす領域 D の点 $Q(x, y)$ が

存在するための条件は点 $(7, 4)$ が領域①上にあることである.

$$4 \geq -\frac{p}{11} \cdot 7 + \frac{p^2 + 121}{22}$$

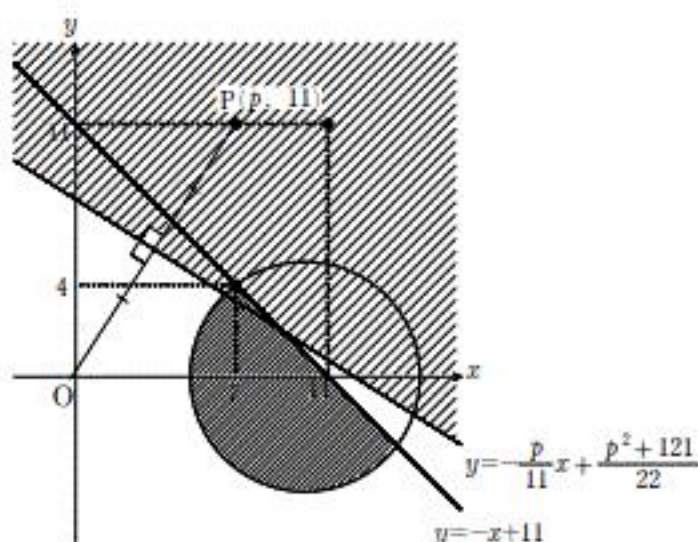
整理して,

$$p^2 - 14p + 33 \leq 0$$

$$(p-3)(p-11) \leq 0$$

$$3 \leq p \leq 11$$

(これは, $0 < p \leq 11$ を満たす.)



- (1) $h_1(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$h_1'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$h_1'(x) = 0$ となる x が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在し,

それを $x = \alpha$ おくと, $h_1(x)$ の増減は下表のとおり.

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$h_1'(x)$	+	0	-
$h_1(x)$	0	↗ 極大 最大	↘ 0

よって,

$$h_1(x) \geq 0$$

すなわち, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

不等式 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つ.

(2)

$$h_2(x) = f(x) - g(x)$$

$$= \cos x - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} + \frac{\pi}{2} \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}} \\ &\leq -\frac{2}{\pi}x + \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}} \quad (\because (1)) \\ &= x \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}} - \frac{2}{\pi} \right) \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\pi}$$

なので,

$$h_2'(x) \leq 0$$

すなわち, $h_2(x)$ は単調減少で,

$$h_2(x) \geq h_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

よって, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

不等式 $g(x) \leq f(x)$ が成り立つ.

(3)

求める面積 S は図の斜線部で,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{\pi}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{\pi}{2} \right) dx \\ &= \left[\sin x + \frac{\pi}{2}x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

また,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx$$

とおくと,

I_2 は右図の斜線部の扇形と三角形の和に等しいので,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} S &= I_1 - I_2 \\ &= \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) - \left(\frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8} \right) \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16} \end{aligned}$$

