

(1) 点 Q は 3 点 O, A, B が定める平面 α 上の点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \\ &= \begin{pmatrix} -a+2b \\ 2a-2b \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおける.

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA} \text{ より, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\begin{aligned}(-a+2b-p) \cdot (-1) + (2a-2b+1) \cdot 2 + (b-2) \cdot 0 &= 0 \\ 5a-6b &= -p-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OB} \text{ より, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\begin{aligned}(-a+2b-p) \cdot 2 + (2a-2b+1) \cdot (-2) + (b-2) \cdot 1 &= 0 \\ -6a+9b &= 2p+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ②を解いて,

$$a = \frac{1}{3}(p+2)$$

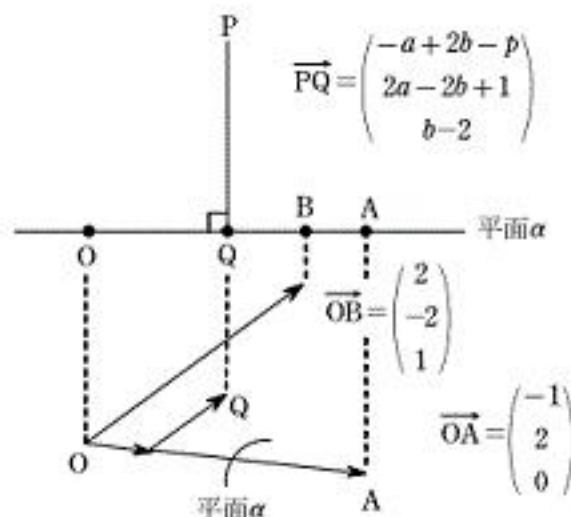
$$b = \frac{4}{9}(p+2)$$

(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるためには,

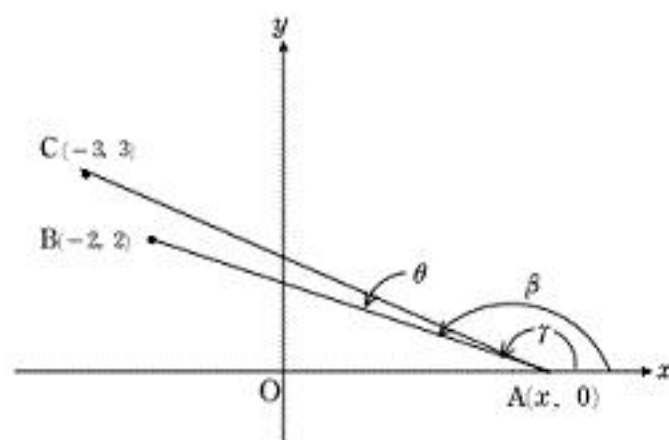
$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ かつ $a+b \leq 1$ となる実数 a, b が存在することである.

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{3}(p+2) \geq 0 \\ \frac{4}{9}(p+2) \geq 0 \\ \frac{1}{3}(p+2) + \frac{4}{9}(p+2) \leq 1 \end{cases}$$

$$\therefore -2 \leq p \leq -\frac{5}{7} \quad (\text{これは, } p < 0 \text{ を満たす})$$



(1)



直線 AB と x 軸と正の向きとのなす角を β とおくと,

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{0-2}{x-(-2)} \\ &= -\frac{2}{x+2}\end{aligned}$$

直線 AC と x 軸と正の向きとのなす角を γ とおくと,

$$\tan \gamma = -\frac{3}{x+3}$$

$\frac{\pi}{2} < \gamma < \beta < \pi$, $\theta = \beta - \gamma$ なので,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\beta - \gamma) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} \\ &= \frac{-\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}}{1 + \frac{6}{(x+2)(x+3)}} \\ &= \frac{x}{x^2 + 5x + 12}\end{aligned}$$

(2) $x > 0$ より,

$$\tan \theta = \frac{1}{x+5+\frac{12}{x}}$$

$x > 0$, $\frac{12}{x} > 0$ から, 相加平均・相乗平均の関係式より,

$$x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{12}{x}} = 4\sqrt{3}$$

なので,

$$\tan \theta = \frac{1}{x + \frac{12}{x} + 5} \leq \frac{1}{4\sqrt{3} + 5}$$

$\tan \theta$ が最大となるのは等号が成立するときなので,

$$\tan \theta \text{ の最大値} = \frac{1}{4\sqrt{3} + 5}$$

このとき, 等号成立条件より,

$$x = \frac{12}{x}$$

$x > 0$ なので,

$$x = 2\sqrt{3}$$

(1) $n=3$ のとき

3項からなる数列 $1, 1, 1$ と

2項からなる数列 $1, 2$ と $2, 1$ の3つである.

したがって,

$$s_3 = 3$$

(2) すべての項の和が $n(\geq 3)$ となるのは,

(i) 初項が 1 のとき, 残りの項の和が $n-1$ なので, s_{n-1} 個.

$$\left[\begin{array}{c} 1, \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{和が } n-1 \text{ なので } s_{n-1} \text{ 個} \end{array} \right]$$

(ii) 初項が 2 のとき, 残りの項の和が $n-2$ なので, s_{n-2} 個.

$$\left[\begin{array}{c} 2, \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{和が } n-2 \text{ なので } s_{n-2} \text{ 個} \end{array} \right]$$

以上 (i), (ii) より,

$n \geq 3$ のとき

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(3)

$$s_n - \alpha s_{n-1} = \beta (s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$$

$$s_n = (\alpha + \beta) s_{n-1} - \alpha \beta s_{n-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②が3以上のすべての n に対して成り立つためには,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \beta = -1 \end{cases}$$

よって, α, β は t の2次方程式 $t^2 - t - 1 = 0$ の実数解で,

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha < \beta$ とすると,

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

(4) $n \geq 3$ のとき

$$s_n - \alpha s_{n-1} = \beta (s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$$

が成り立つので,

$n \geq 1$ のとき

$$s_{n+2} - \alpha s_{n+1} = \beta (s_{n+1} - \alpha s_n)$$

が成り立つ.

よって, 数列 $\{s_{n+1} - \alpha s_n\}$ は初項 $s_2 - \alpha s_1 = 2 - \alpha$, 公比 β の等比数列なので,

$$s_{n+1} - \alpha s_n = (2 - \alpha) \cdot \beta^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②は α, β に関して対称なので,

③は α, β を入れ替えても成り立つので,

$$s_{n+1} - \beta s_n = (2 - \beta) \cdot \alpha^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より,

$$(\beta - \alpha) s_n = (2 - \alpha) \beta^{n-1} - (2 - \beta) \alpha^{n-1}$$

$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) s_n &= \left(2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ \sqrt{5} s_n &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2$ なので,

$$s_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

(1) $g(x) = px + q$ (ただし, $p \neq 0$ p, q は実数) とおくと,

$$f(x) = f'(x)g(x) - 6x$$

より,

$$\begin{aligned} x^3 - 3ax^2 + bx + c &= (3x^2 - 6ax + b)(px + q) - 6x \\ &= 3px^3 + (3q - 6ap)x^2 + (bp - 6aq - 6)x + bq \end{aligned}$$

すべての x に対して等式が成り立つためには,

$$\begin{cases} 1 = 3p & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -3a = 3q - 6ap & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ b = bp - 6aq - 6 & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ c = bq & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

①, ②より,

$$p = \frac{1}{3}, q = -\frac{1}{3}a$$

これらを③, ④に代入すると,

$$b = 3a^2 - 9, c = -a^3 + 3a$$

(2) $f'(x) = 0$ とおくと,

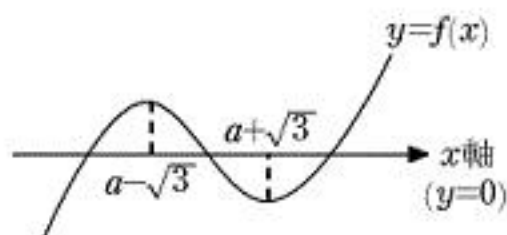
$$3x^2 - 6ax + (3a^2 - 9) = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 3 = 0$$

$$\{x - (a + \sqrt{3})\} \{x - (a - \sqrt{3})\} = 0$$

よって, $f(x)$ の増減は下表の通り.

x	$a - \sqrt{3}$		$a + \sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗	極大	↘	極小



$f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解を持つためには,

$y = f(x)$ が x 軸と異なる 3 つの共有点を持つとよいので,

$$f(a - \sqrt{3}) > 0 \text{ かつ } f(a + \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore f(a - \sqrt{3}) \cdot f(a + \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore \{f'(a - \sqrt{3}) \cdot g(a - \sqrt{3}) - 6(a - \sqrt{3})\} \cdot \{f'(a + \sqrt{3}) \cdot g(a + \sqrt{3}) - 6(a + \sqrt{3})\} < 0$$

$$f'(a - \sqrt{3}) = f'(a + \sqrt{3}) = 0 \text{ なので,}$$

$$36(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$