

- (1) 点 Q は 3 点 O, A, B が定める平面 α 上の点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \\ &= \begin{pmatrix} -a+2b \\ 2a-2b \\ b \end{pmatrix} \cdots \cdots ①\end{aligned}$$

とおける.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA} \text{ より, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ (-a+2b-p) \cdot (-1) + (2a-2b+1) \cdot 2 + (b-2) \cdot 0 &= 0 \\ 5a-6b &= -p-2 \cdots \cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OB} \text{ より, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ (-a+2b-p) \cdot 2 + (2a-2b+1) \cdot (-2) + (b-2) \cdot 1 &= 0 \\ -6a+9b &= 2p+4 \cdots \cdots ③\end{aligned}$$

②, ③より,

$$a = \frac{1}{3}(p+2), b = \frac{4}{9}(p+2)$$

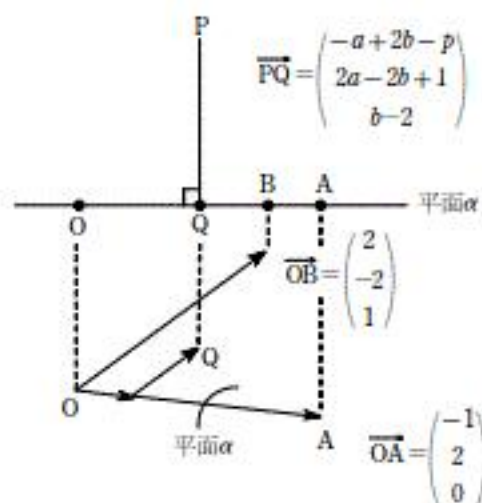
これらを①に代入すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{p+2}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \therefore Q &\left(\frac{5(p+2)}{9}, -\frac{2(p+2)}{9}, \frac{4(p+2)}{9} \right)\end{aligned}$$

- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるためには,

$$a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad b \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a+b \leq 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \begin{cases} \frac{1}{3}(p+2) \geq 0 \\ \frac{4}{9}(p+2) \geq 0 \\ \frac{1}{3}(p+2) + \frac{4}{9}(p+2) \leq 1 \end{cases} \\ \therefore -2 \leq p \leq -\frac{5}{7} \quad (\text{これは, } p < 0 \text{ を満たす})\end{aligned}$$



- (1) 連続する2つの自然数は一方が偶数で他方は奇数なので、その積は偶数である。

よって、 $a_n = n(n+1)$, $a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ はともに偶数であり、

a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は偶数である。

- (2) d_n は8で割り切れると仮定する。

このとき、 a_n, a_{n+3} は8の倍数なので、

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_n &= (n+3)(n+4) - n(n+1) \\ &= 6n + 12 \\ &= 6(n+2) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot (n+2) \end{aligned}$$

は8の倍数である。

よって、

$$n+2 = 4k \quad (\text{ただし、} k \text{ は自然数})$$

とおける。

このとき、

$$\begin{aligned} a_n &= n(n+1) \\ &= (4k-2)(4k-1) \\ &= 2(2k-1)(4k-1) \end{aligned}$$

となり、 $2k-1$, $4k-1$ は奇数なので、 a_n が8の倍数であることに矛盾する。

すなわち、 d_n は8で割り切れない。

- (3) d_n は p で割り切れると仮定する。

このとき、 a_n, a_{n+3} は p の倍数なので、

$$a_{n+3} - a_n = 2 \cdot 3 \cdot (n+2)$$

は p の倍数である。

よって、

$$n+2 = pk \quad (\text{ただし、} k \text{ は自然数})$$

とおける。

このとき、

$$\begin{aligned} a_n &= n(n+1) \\ &= (pk-2)(pk-1) \\ &= p^2k^2 - 3pk + 2 \\ &= (pk^2 - 3k)p + 2 \end{aligned}$$

となり、 p は5以上の素数なので、 a_n が p の倍数であることに矛盾する。

すなわち、 d_n は p で割り切れない。

- (4) (1), (2), (3)より、

$$d_n = 2^q \cdot 3^r \quad (\text{ただし、} q=1, 2, r \text{ は} 0 \text{ 以上の整数})$$

とおける。

ここで、 d_n は9で割り切れると仮定すると、 a_n, a_{n+3} は9の倍数なので、

$$a_{n+3} - a_n = 2 \cdot 3 \cdot (n+2)$$

は9の倍数で、

$$n+2 = 3k \quad (\text{ただし、} k \text{ は自然数})$$

とおける。

このとき、

$$\begin{aligned} a_n &= (3k-2)(3k-1) \\ &= 9k^2 - 9k + 2 \\ &= 9(k^2 - k) + 2 \end{aligned}$$

となり、9の倍数であることに矛盾する。

すなわち、 d_n は9で割り切れず、 r は0または1である。

よって、

$$d_n = 2^q \cdot 3^r \leq 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

また、例えば $n=8$ のとき、

$$\begin{cases} a_8 = 8 \cdot 9 = 12 \cdot 6 \\ a_{11} = 11 \cdot 12 \end{cases}$$

6と11は互いに素なので、

$$d_8 = 12$$

よって、 $d_n = 12$ となる n の1つは、

$$n=8$$

$$(1) \quad f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)} \text{ より,}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x(1-tx) - (x+t)\{1 \cdot (1-tx) + x(-t)\}}{x^2(1-tx)^2} \dots\dots(\star)$$

$$= \frac{t(x^2 + 2tx - 1)}{x^2(1-tx)^2}$$

ここで,

$$g(x) = x^2 + 2tx - 1$$

とおくと,

$$g(0) = -1 < 0, \quad g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} + 1 > 0$$

なので, $y = g(x)$ は x 軸と相異なる 2 つの共有点を持つ.

この共有点の x 座標を α_0, β_0 (ただし, $\alpha_0 < \beta_0$) とおくと,

$y = f(x)$ の増減は下表のとおり.

x	$-\infty$		α_0		0		β_0		$\frac{1}{t}$		∞
$f'(x)$		+	0	-	/	-	0	+	/	+	
$f(x)$		↗	極大	↘		↘	極小	↗		↗	

よって, $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつ持つ.

$$(2) \quad \alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta \text{ で, } \alpha, \beta \text{ は, } x \text{ についての 2 次方程式}$$

$$x^2 + 2tx - 1 = 0$$

の解なので, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2t \\ \alpha\beta = -1 \end{cases} \dots\dots\textcircled{1}$$

線分 PQ の中点 M を $M(X, Y)$ とおくと,

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= \frac{-2t}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -t \quad \dots\textcircled{2}$$

$$Y = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha + t}{\alpha(1 - t\alpha)} + \frac{\beta + t}{\beta(1 - t\beta)} \right]$$

$f'(\alpha) = 0$ より, $(\star)$ の分子より,

$$\alpha(1 - t\alpha) - (\alpha + t)(1 - 2t\alpha) = 0$$

$$\alpha(1 - t\alpha) = (\alpha + t)(1 - 2t\alpha)$$

$f'(\beta) = 0$ より, 同様にして,

$$\beta(1 - t\beta) = (\beta + t)(1 - 2t\beta)$$

よって,

$$Y = \frac{1}{2} \left[\frac{\cancel{\alpha} + t}{(\cancel{\alpha} + t)(1 - 2t\alpha)} + \frac{\cancel{\beta} + t}{(\cancel{\beta} + t)(1 - 2t\beta)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - 2t(\alpha + \beta)}{1 - 2t(\alpha + \beta) + 4t^2\alpha\beta}$$

$$= 2t^2 + 1 \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

②より,

$$t = -X \quad \dots\dots\textcircled{2}'$$

②' を③へ代入すると,

$$Y = 2X^2 + 1$$

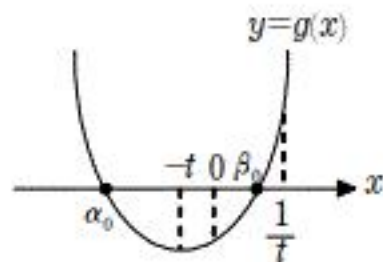
また, $0 < t < 1$ と②' より,

$$0 < -X < 1$$

$$\therefore -1 < X < 0$$

よって, 求める中点 M の軌跡は,

$$\text{放物線: } y = 2x^2 + 1 \quad (\text{ただし, } -1 < x < 0)$$



(1) (i) $m=1$ のとき

箱 Y から 1 か 2 の番号札を取り出し、その札を箱 Y に戻し、
再び箱 Y から 1 の番号札を取り出すときなので、
その確率は、

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

(ii) $m=2$ のとき

箱 Y から 1 か 2 の番号札を取り出し、その札を箱 Y に戻し、
再び箱 Y から 2 の番号札を取り出すときなので、
その確率は、

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

(iii) $3 \leq m \leq n$ のとき

箱 Y から 1 か 2 の番号札を取り出し、その札を箱 Y に戻し、
再び箱 Y から m の番号札を取り出すとき、
または、はじめから箱 Y から m の番号札を取り出すときなので、
その確率は、

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2+n}{n^2}$$

(2) (1)で求めた B の得点が m になる確率を b_m とおく。

また、A の得点が m より小さくなる確率を a_m とおくと、

$$a_m = \frac{m-1}{n}$$

よって、A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n は、

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{m=1}^n b_m \cdot a_m \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \sum_{m=3}^n b_m \cdot a_m \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot 0 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{m=3}^n \frac{2+n}{n^2} \cdot \frac{m-1}{n} \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{2+n}{n^3} \{2+3+\cdots+(n-1)\} \\ &= \frac{2}{n^3} + \frac{2+n}{n^3} \cdot \frac{\{2+(n-1)\}(n-2)}{2} \\ &= \frac{n(n^2+n-4)}{2n^3} \\ &= \frac{n^2+n-4}{2n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_{n+1}(x) &= 2\cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \\
 &= 2\cos x + \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt \right\} \cdot \sin x - \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt \right\} \cdot \cos x
 \end{aligned}$$

ここで,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt \quad \cdots \cdots ①$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt \quad \cdots \cdots ②$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x) &= 2\cos x + b_n \sin x - a_n \cos x \\
 &= (2 - a_n) \cos x + b_n \sin x \quad \cdots \cdots ③
 \end{aligned}$$

①より,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_{n+1}(t) \sin t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{(2 - a_n) \cos t + b_n \sin t\} \sin t dt \quad (\because ③) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ (2 - a_n) \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2t dt + b_n \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ (2 - a_n) \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^\pi + b_n \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^\pi \right\} \\
 &= b_n \quad \cdots \cdots ④
 \end{aligned}$$

②より,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_{n+1}(t) \cos t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{(2 - a_n) \cos t + b_n \sin t\} \cos t dt \quad (\because ③) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ (2 - a_n) \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt + b_n \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2t dt \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ (2 - a_n) \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^\pi + b_n \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^\pi \right\} \\
 &= 2 - a_n \quad \cdots \cdots ⑤
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad c_n = a_n - 1 \quad \cdots \cdots ⑥ \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned}
 c_{n+2} &= a_{n+2} - 1 \\
 &= b_{n+1} - 1 \quad (\because ④) \\
 &= (2 - a_n) - 1 \quad (\because ⑤) \\
 &= -(a_n - 1) \\
 &= -c_n \quad (\because ⑥)
 \end{aligned}$$

(i) $n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) のとき

$$c_{2k+1} = -c_{2k-1}$$

数列 $\{c_{2k-1}\}$ は, 初項 $c_1 = a_1 - 1$, 公比 -1 の等比数列なので,

$$\begin{aligned}
 c_{2k-1} &= (a_1 - 1) \cdot (-1)^{k-1} \\
 \therefore c_n &= (a_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{ただし, } n \text{ は奇数})
 \end{aligned}$$

(ii) $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) のとき

$$c_{2k+2} = -c_{2k}$$

数列 $\{c_{2k}\}$ は, 初項 $c_2 = a_2 - 1 = b_1 - 1$, 公比 -1 の等比数列なので,

$$\begin{aligned}
 c_{2k} &= (b_1 - 1) \cdot (-1)^{k-1} \\
 \therefore c_n &= (b_1 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n-2}{2}} \quad (\text{ただし, } n \text{ は偶数})
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(x) = \cos x + \sin x \text{ とおくと,}$$

①より,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_1(t) \sin t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos t + \sin t) \sin t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2t dt + \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^\pi \right\} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

②より,

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt + \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2t dt \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^\pi + \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^\pi \right\} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる.

これらと(2)より, n の偶奇によらずに $c_n = 0$ となり,

⑥より,

$$a_n = c_n + 1 = 1$$

④より,

$$b_n = a_{n+1} = 1$$

となる.

よって, 求める $f(x)$ の 1 つは,

$$f(x) = \cos x + \sin x$$