

# 数 学

(数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B)

9：00～11：00

## 注 意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。

3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学0－1

(問①用)，

解答用紙番号
数学0－2

(問②用)，

解答用紙番号
数学0－3

(問③用)，

解答用紙番号
数学0－4

(問④用)，

解答用紙番号
数学0－5

(問⑤用)の5枚である。

4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。  
ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 下書き用紙は回収しない。

## 解 答 上 の 注 意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

1  $p$  を負の実数とする。座標空間に原点  $O$  と 3 点  $A(-1, 2, 0)$ ,

$B(2, -2, 1)$ ,  $P(p, -1, 2)$  があり, 3 点  $O, A, B$  が定める平面を  $\alpha$  とする。また, 点  $P$  から平面  $\alpha$  に垂線を下ろし,  $\alpha$  との交点を  $Q$  とする。

(1) 点  $Q$  の座標を  $p$  を用いて表せ。

(2) 点  $Q$  が  $\triangle OAB$  の周または内部にあるような  $p$  の範囲を求めよ。

2  $n$  を自然数とし,  $a_n = n(n+1)$  とする。さらに,  $a_n$  と  $a_{n+3}$  の最大公約数を  $d_n$  とする。

(1)  $d_n$  は偶数であることを示せ。

(2)  $d_n$  は 8 で割り切れないことを示せ。

(3)  $p$  を 5 以上の素数とすると,  $d_n$  は  $p$  で割り切れないことを示せ。

(4)  $d_n \leq 12$  を示せ。また,  $d_n = 12$  となるような  $n$  を 1 つ求めよ。

3  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする。  $0, \frac{1}{t}$  以外のすべての実数  $x$  で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(1)  $f(x)$  は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2)  $f(x)$  の極大値を与える  $x$  の値を  $\alpha$ , 極小値を与える  $x$  の値を  $\beta$  とし, 座標平面上に 2 点  $P(\alpha, f(\alpha))$ ,  $Q(\beta, f(\beta))$  をとる。  $t$  が  $0 < t < 1$  を満たしながら変化するとき, 線分  $PQ$  の中点  $M$  の軌跡を求めよ。

- 4  $n$  を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から  $n$  までの  $n$  枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から  $n$  までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1)  $m$  を  $n$  以下の自然数とする。B の得点が  $m$  になる確率を求めよ。  
 (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率  $p_n$  を求めよ。

- 5  $f(x)$  を区間  $[0, \pi]$  で連続な関数とする。関数  $f_1(x), f_2(x), \dots$  を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数  $n$  に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  を用いて表せ。  
 (2)  $c_n = a_n - 1$  とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$  が成立することを示し、一般項  $c_n$  を  $a_1$  と  $b_1$  を用いて表せ。  
 (3)  $a_n, b_n$  が  $n$  によらない定数となるような  $f(x)$  を 1 つ求めよ。

