

1996 年度 入学試験 問題

(工 学 部 A)

数 学 (90 分)

記 号	科 目
N	数 学

- 注意 ① 解答は解答用紙に記入しなさい。
- ② 解答には、答を導くための途中の経過（〔I〕を除く）、および答を記入しなさい。
- ③ 問題文は 2 ページから 5 ページまでです。

〔I〕 つぎの (1), (2), (3) の文中の (ア) ～ (エ) に適する答を解答用紙の指定の欄に記入せよ。ただし、答を導くための途中の経過は記入しなくてよい。

(1) 正の数を項とする数列 $\{a_n\}$ について

$$a_1 = 2, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n \quad (n \geq 2)$$

が成り立つとき、 $a_{30} =$ (ア) である。

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$, 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とするとき,

$A^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす θ は (イ) 個あり, そのうち値が最大

のものは (ウ) である。

(3) $-10 < x < 10$ の範囲で

$$f(x) = |\sin \pi x| \cos \frac{\pi x}{10}$$

の極大点の個数は (エ) である。

〔Ⅱ〕 初項 $x_1 = 0$ とし、 x_n が定まったとき、曲線

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{ただし } x > -1)$$

上の $x = x_n$ に対応する点における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする。このとき、数列 $\{x_n\}$ について、つぎの問に答えよ。

(1) x_{n+1} と x_n との関係を式で表せ。

(2) $x_n - 1$ を考えることにより、第 n 項 x_n を求め、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を計算せよ。

〔Ⅲ〕 座標平面上に4点 $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$ を頂点とする正方形がある。曲線

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a > 0)$$

は、2つの頂点 A , C を通り、 $-1 < x < 1$ の範囲で正方形 $ABCD$ の内部にあるとする。この曲線によって分けられた2つの部分の面積が等しいとき、つぎの問に答えよ。

(1) b , d の値を求めよ。また、 a と c の関係式を求めよ。

(2) a がとりうる値の範囲を求めよ。

〔IV〕 定直線 ℓ 上の定点 O を中心とする球と、 O を通り ℓ に垂直な平面 π が与えられている。この球の半径は時刻 $t = 0$ のとき 4 cm であり、その後毎秒 2 cm の割合で大きくなる。平面 π は ℓ に垂直であるという条件をみたしながら毎秒 3 cm の速さで O から離れていくとする。この球が、 t 秒後に平面 π によって2つの部分に分けられているとき、小さい方の部分の体積を $V\text{ cm}^3$ とする。このとき、つぎの問に答えよ。

(1) V を t の式で表せ。

(2) V が最大になるのは何秒後か。