

1997 年度 入学試験 問題

(工 学 部 A)

数 学 (90 分)

記 号	科 目
N	数 学

- 注意 ① 解答は解答用紙に記入しなさい。
- ② 解答には、答を導くための途中の経過（〔I〕を除く）、および答を記入しなさい。
- ③ 問題文は 2 ページから 5 ページまでです。

〔I〕 つぎの(1), (2), (3), (4) の文中の ア ～ カ に適する答を解答用紙の指定の欄に記入せよ。ただし、答を導くための途中経過は記入しなくてよ

(1) $\frac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n は ア 個ある。

(2) 2 次関数 $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ について、区間 $0 < x < 1$ で $f(f(x)) = f(x)$ をみたす x の値は イ と ウ である。

(3) $0 < a < \frac{\pi}{2}$ をみたす定数 a に対し

$$D = \{(x, y) \mid y \geq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$E = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin a, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

とする。このとき、図形 $D \cap E$ の面積 S を a の式で表すと

$S =$ エ である。

(4) $A = \begin{pmatrix} a+1 & \frac{1}{2} \\ -a-1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ に対し、 $A^2 = 2A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき、 $a =$ オ , $A^4 =$ カ である。

〔Ⅱ〕 3 次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ が $x = a$ で極大となるとき、次の問に答えよ。

(1) a の値と極大値，および変曲点を求めよ。

(2) $P(a, f(a))$ と変曲点 Q を結ぶ線分 PQ と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔Ⅲ〕 数列 $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が条件

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

をみたすとき、曲線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 上の $x = x_n$ に対応する点を A_n とし、弧 $\widehat{A_n A_{n+1}}$ の長さを S_n とする。このとき次の問に答えよ。

(1) S_n を x_{n+1} と x_n を用いて表せ。

(2) $x_1 = 0, S_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき、 x_n を n の式で表せ。

(IV) 空間のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ はすべて大きさが1で, それらの内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

であるとする。この空間内の定点 O を始点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ が

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{c}, \quad \overrightarrow{OQ} = u\vec{b} + v\vec{c}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

となるように点 P, Q, R をとる。さらに

$$\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OQ} \quad (0 < t < 1)$$

であるとき, 次の問に答えよ。

(1) x, y, u, v, t の間に成り立つ 3 つの関係式を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の大きさの平方 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ を x, y, u, v で表せ。

(3) $|\overrightarrow{PQ}|^2 \geq \frac{4}{3}xu$ を導き, $|\overrightarrow{PQ}|$ の最小値を求めよ。