

2000 年度入学試験問題

(工 学 部 A)

数 学 (90 分)

I. 解答上の注意

- 問題文中の ア, イ, ウ … のそれぞれには, 特に指示がないかぎり, − (マイナスの符号), または 0 ~ 9 までの数が 1 つずつ入ります。当てはまるものを選び, マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。ただし, 分数の形で解答が求められているときには, 符号は分子に付け, 既約分数で解答しなさい。

〔例〕 $\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには, 以下のようにマークしなさい。

ア	☒	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	☐	0	1	2	☒	4	5	6	7	8	9
ウ	☐	0	☒	2	3	4	5	6	7	8	9
エ	☐	0	1	2	3	☒	5	6	7	8	9

- マークシートの解答用紙の記入上の注意については, 問題冊子の裏表紙に記載してありますから, この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし, 問題冊子を開いてはいけません。
- 問題文は 4 ページから 15 ページまでです。

II. 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには, 以下のことに注意してマークしなさい。

- HB の黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆, ボールペンを用いてマークしてはいけません。
- 解答を訂正する場合には, 消しゴムできれいに消してから, あらためてマークしなさい。
- マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。
- 所定欄以外にはマークしたり, 記入したりしてはいけません。
- アの解答を 3 にマークするときには, 以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例

ア	☐	0	1	2	☒	4	5	6	7	8	9
---	-----------------------	---	---	---	----------------------------------	---	---	---	---	---	---

悪いマークの例

ア	☐	0	1	2	☒	4	5	枠外にはみ出してマークしてはいけません。			
ア	☐	0	1	2	☒	4	5	枠全体をマークするようにしなさい。			
ア	☐	0	1	2	☒	4	5	○でかこんでマークしてはいけません。			
ア	☐	0	1	2	☒	4	5	×を書いてマークしてはいけません。			

〔I〕

(1) 整式 $P(x)$ を

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

とする。 $P(x)$ を $x^3 + 2x$ で割った余りが 3 であるとき、 $c = \boxed{\text{ア}}$ a 、
 $d = \boxed{\text{イ}}$ b 、 $e = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。

さらに、 $P(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $5x + 9$ であるとき、
 $a = \boxed{\text{エオ}}$ 、 $b = \boxed{\text{カ}}$ となる。

（〔I〕の問題は次ページに続く。）

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}+i}$ の絶対値は $\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}$ であり、 -180° より大きく 180° 以下の偏角

の1つは $\boxed{\text{クケコ}}$ $^\circ$ となる。

また、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 &= 2^{\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}} (\cos \boxed{\text{セソ}}^\circ + i \sin \boxed{\text{セソ}}^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}} - \boxed{\text{チ}} + i (\sqrt{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}})}{\boxed{\text{ツテ}}}\end{aligned}$$

となる。

(〔I〕の問題は次ページに続く。)

$$(3) \quad \cos^3 x = \frac{\boxed{\text{ト}} \cos x + \cos \boxed{\text{ナ}} x}{\boxed{=}}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^3 x dx = \frac{\boxed{\text{ヌ}} \pi - \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

となる。

〔Ⅱ〕

空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$\vec{a} = (2, -3, 5), \quad \vec{b} = (-1, 2, 3)$$

とする。 $|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$, $|\vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を

θ とするとき

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オカキ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

となる。

(〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。)

次に、行列 A の第1列にベクトル $\vec{a}$ の成分を順番に並べ、第2列に $\vec{b}$ の成分を順番に並べると

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

また、行列 X, B を

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 3 \end{pmatrix}$$

において、ベクトル $\vec{c}$ を

$$\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = AX - B$$

により定め、 $|\vec{c}|^2 = L$ とおく。

((II)の問題は次ページに続く。)

x を定数として、 L を y で微分すると

$$\frac{dL}{dy} = \boxed{\text{コサ}} x + \boxed{\text{シス}} y - \boxed{\text{セ}} p - \boxed{\text{ソタ}}$$

である。 $p > 0$ として、直線 $\frac{dL}{dy} = 0$ が円 $x^2 + y^2 = 9$ の接線となるのは

$$p = \boxed{\text{チツ}} + \boxed{\text{テ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$$

のときである。

〔Ⅲ〕

行列 A, E を

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) $A^2 = pA + qE, A^3 = rA + sE$ とおくと

$$p = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, q = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, r = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, s = \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。

(2) n を自然数として, $A^n = a_n A + b_n E$ とおく。 $A^{n+1} = A \times A^n$ より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} a_n + b_n \\ b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} a_n \end{cases}$$

が成り立つ。したがって, $n \geq 2$ のとき $a_{n+1} - a_n = r(a_n - a_{n-1})$ が
成り立ち

$$r = \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

(〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。)

(3) 以上より

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} - \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} r^{\boxed{\text{ノ}}}$$

となる。ここで、 $\boxed{\text{ノ}}$ については、以下の ①～④ のうちから 1 つを選べ。

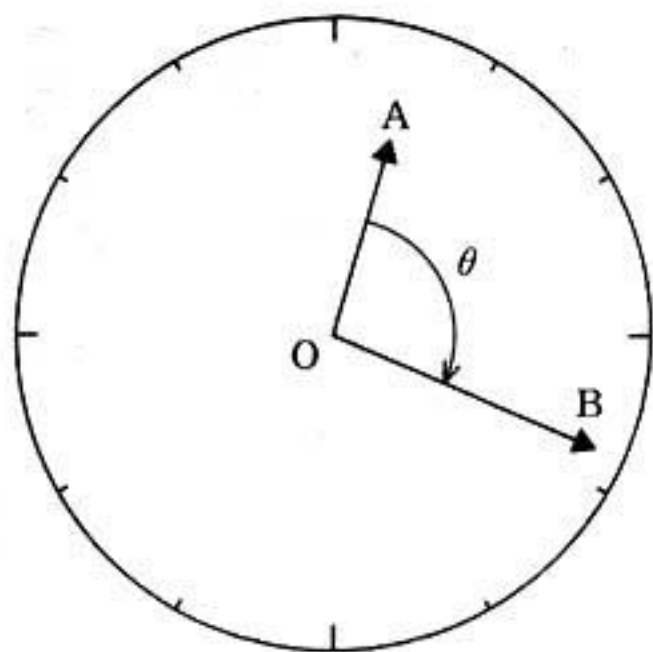
- ① $n - 3$ ② $n - 2$ ③ $n - 1$ ④ n ⑤ $n + 1$

〔IV〕

時計の短針を OA、長針を OB とし、 $OA = 3$ 、 $OB = 4$ とする。0 時から 1 時までの間に、短針 OA は等速度で $\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ ラジアン回転する。

一方、長針 OB は、0 時から 1 時までの 3600 秒の間に等速度で 1 回転する。

ここで、 $\angle AOB = \theta$ とおくと 0 時から t 秒経過したとき



$$\theta = \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオカキク}}} \pi t \quad \cdots \cdots \text{①}$$

となる。

（〔IV〕の問題は次ページに続く。）

次に、AB の長さを x とすると

$$x^2 = \boxed{\text{ケコ}} - \boxed{\text{サシ}} \cos \theta \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{2}$$

が成り立つ。②の両辺を t で微分して、①より $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ であるから

$$x \frac{dx}{d\theta} = \boxed{\text{スセ}} \sin \theta \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{3}$$

となる。

x が最も早く増加するときの x の値 x_0 を求めよう。このとき

$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \boxed{\text{ソ}}$ であるから③の両辺を θ で微分して整理すると

$$\boxed{\text{タチ}} \frac{\sin^2 \theta}{x^2} = \cos \theta$$

となる。②を代入して整理すれば、 $\cos \theta$ に関する方程式

$$\cos^2 \theta - \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}} \cos \theta + \boxed{\text{ニ}} = 0$$

が得られる。これを解くと、 $\cos \theta = -\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であり、 $x_0 = \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(以 上)