

2000 年度入学試験問題

(情報科学部)

数 学 (90 分)

解答上の注意

1. 〔Ⅰ〕, 〔Ⅱ〕, 〔Ⅳ〕の問題文中のア, イ, ウ, …のそれぞれには, 文字, 記号, または数字が1つずつ入ります。当てはまるものを選び, マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。ただし, 分数の形で解答が求められているときには, 符号は分子に付け, 表現が一通りに決まらない場合は, 既約分数で, 分母は有理化して解答しなさい。

〔例〕 $\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウエ}}\boxed{\text{オ}}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{14^5}$ と答えたいときには, 以下のようにマークしなさい。

ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$	大	小
イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$	大	小
ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$	大	小
エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$	大	小
オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$	大	小

2. 〔Ⅲ〕については, 符号や根号も数値に含めます。したがって, マークシートの解答用紙の対応する欄に2つ以上マークする場合があります。分数の形で解答が求められているときは, 符号は分子に付け, 表現が一通りに決まらない場合は, 既約分数で, 分母は有理化して解答しなさい。

〔例〕 $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ に $-\frac{1}{2}$, $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ に $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えたいときには, 以下のようにマークしなさい。

ア	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	π	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$
イ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	π	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$
ウ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	π	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$
エ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	π	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{g}{h}$

3. マークシート記入上の注意については, 問題冊子の裏表紙に記載してありますから, この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし, 問題冊子を開いてはいけません。
4. 〔Ⅳ〕の最後の問題の解答は, 記述式の所定の解答場所に解答しなさい。
5. 問題文は2ページから8ページまでです。

マークシート記入上の注意

マークシート解答方法では, 鉛筆でマークしたものを機械が直接読みとって採点します。したがって解答はHBの黒鉛筆でマークしてください。(万年筆, ボールペン, シャープペンシルなどを使用しないこと)

記入上の注意

1. 記入例 アの解答を3にマークする場合。

正しいマークの例

ア	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

悪いマークの例

ア	-	0	1	2	3	4	5	枠外にはみ出してマークしてはいけません。			
ア	-	0	1	2	3	4	5	枠全体をマークするようにしなさい。			
ア	-	0	1	2	3	4	5	○でかこんでマークしてはいけません。			
ア	-	0	1	2	3	4	5	×を書いてマークしてはいけません。			

2. 解答を訂正する場合は, 消しゴムでよく消してから, あらためてマークすること。
3. 解答用紙をよごしたり, 折りまげたりしないこと。
4. 問題に指定された数よりも多くマークしないこと。

〔Ⅰ〕（この問題の解答は、マークシートの解答用紙にマークして解答しなさい。）

- (1) ある大学には 47 都道府県から学生が集まっている。少なくとも 1 つの都道府県が 10 名以上の出身者をもつことが確実に言えるためには学生数の合計が何名以上でなければならないか。 **アイウ**

- (2) 10 種類の絵葉書の中から異なる 5 種類の絵葉書を選び出す組合せを考える。それぞれの絵葉書は十分に数が揃っているとして、これらの絵葉書の組合せを 100 人の人にプレゼントする方法は何通りかを以下のように考える。ただし、違う人に同じ組合せの絵葉書をプレゼントしてもよいものとする。

10 種類の絵葉書の中から異なる 5 種類の絵葉書を選び出す組合せの数は **エオカ** 通りである。1 番目の人には、**エオカ** 通りの組合せの中から 1 組をプレゼントし、2 番目の人には、1 番目の人と同じ組合せの絵葉書をプレゼントしてもよいから、やはり **エオカ** 通りの組合せの中から 1 組をプレゼントすればよい。3 番目の人には、1 番目の人および 2 番目の人と同じ組合せの絵葉書をプレゼントしてもよいから、やはり **エオカ** 通りの組合せの中から 1 組をプレゼントすればよい。以下同様にして、100 番目の人まで **エオカ** 通りの組合せの中から 1 組をプレゼントすればよいから求める場合の数は **エオカ** **キクケ** 通りである。

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h+1)^2} - e^{h^2+1}}{h}$ を計算せよ。 $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} e$

(4) $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ のとき, α^{10} を求めよ。

(解答)

$$|\alpha| = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} \text{ ゆえ}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} \left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} i \right) \\ &= \frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi \right) \end{aligned}$$

である。ただし, $0 < \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi < 2\pi$ とする。

したがって,

$$\begin{aligned} \alpha^{10} &= \left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}} \right)^{\boxed{\text{タチ}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi \right) \\ &= \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}^{\boxed{\text{ツ}}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi \right) \\ &= \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}} i \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕（この問題の解答は、マークシートの解答用紙にマークして解答しなさい。）

(1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log_e x \leq x - 1$ が成り立つことを以下のように証明

する。 $f(x) = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} - \log_e \boxed{\text{ア}}$ とおく。 $f'(x) = \boxed{\text{イ}} - \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ ゆえ、
 $f(x)$ の増減表を書けば、

x	0	...	イ	...
$f'(x)$		ウ	エ	オ
$f(x)$		カ	キ	ク

であるから $x > 0$ の範囲で、 $x = \boxed{\text{イ}}$ のとき、最 $\boxed{\text{ク}}$ 値 $f(\boxed{\text{イ}}) = \boxed{\text{エ}}$ をとる。したがって、 $x > 0$ の範囲で、 $f(x) \geq \boxed{\text{エ}}$ である。

- (2) 任意の2つの n 個の実数の組 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ と $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ が与えられたとき、次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_e p_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log_e q_i$$

ただし、

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n q_i = 1, q_i > 0 \end{cases}$$

とする。

(1)の結果を用いて、上の不等式を証明する。

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n p_i \log_e p_i + \sum_{i=1}^n p_i \log_e q_i &= \sum_{i=1}^n \boxed{\text{ケ}} \log_e \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \boxed{\text{ケ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \boxed{\text{コ}} - \sum_{i=1}^n \boxed{\text{サ}} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

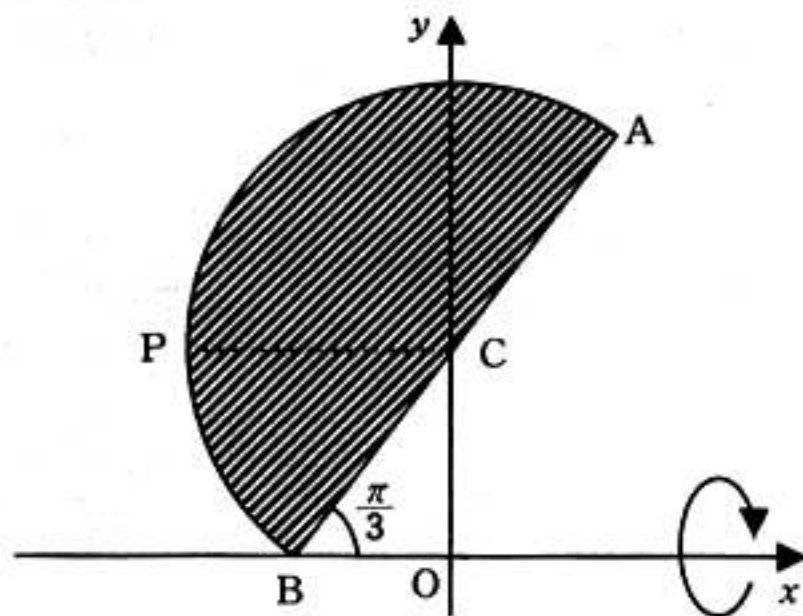
なお、上式で等号が成立するのはすべての i に対して $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} = \boxed{\text{ス}}$ のときのみである。

〔Ⅲ〕（この問題の解答は、マークシートの解答用紙にマークして解答しなさい。

$$\text{ただし, } \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}, \operatorname{sect} = \frac{1}{\cos t}, \operatorname{cott} = \frac{1}{\tan t}$$

$$\operatorname{cosec}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \operatorname{sec}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \operatorname{cot}^2 t = \frac{1}{\tan^2 t}$$

である。）



左図のように半径 a の半円が x 軸に点 B で接している。 x 軸を回転軸としてこの図形を回転させてできる立体の体積 V を求めなさい。

解 答

弦 AB の中点を C とし、 C を通り x 軸に平行な直線が円弧と交差する点を P とする。

図形の縁から x 軸までの距離を x の関数として表すと、

$$\text{弧 PA : } f_1(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} a + \sqrt{\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}}$$

$$\text{弧 PB : } f_2(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} a - \sqrt{\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}}$$

$$\text{弦 AB : } f_3(x) = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} x + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} a$$

となる。

このとき、体積は

$$V = \pi \int_b^c [\{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2] dx + \pi \int_c^d [\{f_1(x)\}^2 - \{f_3(x)\}^2] dx$$

と表され、積分の範囲は $b = -a$, $c = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$, $d = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる。実際に積分

を実行していくと現れてくる定積分 $T = \int_b^c \sqrt{\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}} dx$ について考える。

$x = a \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ の変数変換を行うと、

$dx = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} dt$ さらに $\sqrt{\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

したがって、 $T = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \right)$ 。

これより $V = \pi a^3 \left(\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \pi + \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \right)$ を得る。

〔Ⅳ〕（この問題の解答は、マークシートの解答用紙にマークして解答しなさい。）

$f(x)$ は以下の条件を満たす4次式である。

1. $f(x)$ は x^2 で割り切れる。
2. 関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極大値2をもつ。
3. 関数 $f(x)$ は $x = 2$ で極小になる。

$f(x)$ の具体的な式を以下の手順で求めることができる。

$f(x)$ は x^2 で割り切れるので、 a, b, c を定数として $f(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$ とおける。

連立方程式

$$\begin{cases} f'(1) = \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イ}} b + \boxed{\text{ウ}} c = 0 \\ f(1) = \boxed{\text{エ}} a + \boxed{\text{オ}} b + \boxed{\text{カ}} c = 2 \\ f'(2) = \boxed{\text{キク}} a + \boxed{\text{ケコ}} b + \boxed{\text{サ}} c = 0 \end{cases}$$

を解いて、 a, b, c の値を求めると、

$$a = \boxed{\text{シス}}, b = \boxed{\text{セソ}}, c = \boxed{\text{タチ}}$$

となる。

また、関数 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようなになる。

ツ