

(数 学)

〔 I 〕 曲線 $y = x^3 - x^2$ を x 軸方向に a だけ平行移動すると、直線 $y = x + 1$ に接する。このときつぎの問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 接点の座標を求めよ。

〔Ⅱ〕 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、 $y = (a + \sin \theta)(a + \cos \theta)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、 a は正の定数とする。

〔Ⅲ〕 1枚の硬貨を何回かくりかえし投げ、表と裏の出方に従って、つぎの規則で文字列をつくってゆく。ここで、 n 回投げた時点の文字列を S_n とおく。

規則：1回目が表のとき、 S_1 はO、裏のとき、 S_1 はUとする。

つぎに2回目が表のとき、 S_1 がOならば S_2 は S_1 と同じ、 S_1 がUならば S_2 は S_1 にOをつけくわえてOUとする。2回目が裏のとき、 S_1 がOならば S_2 は S_1 にUをつけくわえてOUとし、 S_1 がUならば S_2 は S_1 と同じとする。

以下同様に、 $n+1$ 回目が表のとき、 S_n がOで終わっていれば S_{n+1} は S_n と同じ、 S_n がUで終わっていれば S_{n+1} は S_n にOをつけくわえたものとする。また $n+1$ 回目が裏のとき、 S_n がOで終わっていれば S_{n+1} は S_n にUをつけくわえたものとし、 S_n がUで終わっていれば S_{n+1} は S_n と同じとする。

さて、 S_n に含まれる文字の個数を、 S_n の長さと呼ぶことにする。例えば、文字列OUOの長さは3である。そこで、 S_n の長さの期待値を $E(n)$ とおくとき、つぎの問いに答えよ。ただし、問題の硬貨は何回投げても、各回独立に、表と裏が等確率で出るものとする。

(1) $E(3)$ と $E(4)$ を求めよ。

(2) S_6 の長さが3となるような、硬貨の6回の表裏の出方は全部で何通りか。