

(1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、以下の不等式が成立する。まず、

$0 \leq \cos x \leq 1$ であるから、 $\cos x \geq \cos^2 x$ である。また、

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \cos x + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$

であるから、

$$\cos \frac{x}{2} \geq \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \cos x + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{4} &\geq \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} \cos \boxed{\text{エ}} + \frac{1}{\boxed{\text{オ}}} \\ &\geq \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \cos x + \frac{1}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{オ}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

一般に $k = 1, 2, 3, \dots$ のときに

$$\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \geq \left(\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\right) \boxed{\text{ケ}} \cos x + \sum_{m=1}^k \left(\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\right) \boxed{\text{コ}}$$

となる。

ただし、空欄に数字を解答するときには、条件を満たす最小のものを選ぶ。

また、文字式を解答するときには、以下の①～⑧のうちから1つを選ぶ。

① $k-2$ ② $k-1$ ③ k ④ $m-2$ ⑤ $m-1$ ⑥ m

⑦ $\frac{x}{2}$ ⑧ $\frac{x}{4}$

(2) 三角形 ABC の外接円の中心を P とし

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AP} = \vec{c}$$

とおき, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ とする。M, N をそれぞれ線分 AB, 線分 AC の中点とすると,

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{PN} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \vec{b} - \vec{c}$$

と表されることなどを用いると,

$$\vec{c} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \vec{b}$$

となる。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n b_n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}(a_n + b_n)^2 & n > 0 \\ 1 + x & n = 0 \end{cases}$$

ただし $x > 0$ とする。

下記で, $\boxed{\text{ト}}$, ..., $\boxed{\text{ノ}}$ の解答方法についてはこの問題の最後の指示に従え。

定義より

$$a_1 = 1, b_1 = 1 + x$$

$$a_2 = a_1 b_1 = a_1 + \boxed{\text{ト}}$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(a_1 + b_1)^2 = b_1 + \boxed{\text{ナ}}$$

であるから, $a_2 > a_1$, $b_2 > b_1$ が成り立つ。これより $a_2 > 1$, $b_2 > 1 + x$ を得る。

一般に, $n > 1$ のとき,

$$a_n > 1, b_n > 1 + x$$

が成り立つ。実際, 数学的帰納法により,

$$a_{n+1} = a_n b_n > 1 \cdot (1 + x) > 1$$

であり,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n)^2 > \frac{1}{4}(\boxed{\text{ニ}} + x)^2 > 1 + x$$

である。

ここで $n > 0$ のとき, $a_{n+1} - a_n$ をもとめると

$$a_{n+1} - a_n = a_n(b_n - 1) > \boxed{\times}$$

であるから,

$$a_{n+1} > 1 + \boxed{\text{ネ}}$$

となり, 数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散する。

さらに $b_1 > a_1$ であり,

$$b_{n+1} = \boxed{\text{ノ}} + a_{n+1} > a_{n+1}$$

であるから, $b_n > a_n$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

であるから, 数列 $\{b_n\}$ も正の無限大に発散する。

ただし, $\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$, $\boxed{\times}$ については以下の①～⑨のうちから1つを選べ。このとき $\boxed{\times}$ については, 解となるもののうち最大のものを選べ。

- | | | | | |
|---------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ $\frac{1}{4}$ | ⑤ x |
| ⑥ x^2 | ⑦ $\frac{1}{2}x$ | ⑧ $\frac{1}{4}x$ | ⑨ $\frac{1}{2}x^2$ | ⑩ $\frac{1}{4}x^2$ |

また, $\boxed{\text{ネ}}$ は, 解となるもののうち最大のものを以下の①～⑨のうちから1つを選べ。

- | | | |
|---------------------|---------------|---------------------|
| ① x | ② $x - 1$ | ③ $x + 1$ |
| ④ nx | ⑤ $(n - 1)x$ | ⑥ $(n + 1)x$ |
| ⑦ $x(x + 1)$ | ⑧ $nx(x + 1)$ | ⑨ $(n - 1)x(x + 1)$ |
| ⑩ $(n + 1)x(x + 1)$ | | |

$\boxed{\text{ノ}}$ については以下の①～⑨のうちから1つを選べ。

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| ① $\frac{1}{2}(b_n - a_n)$ | ② $\frac{1}{2}(b_n - a_n)^2$ | ③ $\frac{1}{4}(b_n - a_n)$ |
| ④ $\frac{1}{4}(b_n - a_n)^2$ | ⑤ $\frac{1}{8}(b_n - a_n)$ | ⑥ $\frac{1}{8}(b_n - a_n)^2$ |
| ⑦ $\frac{1}{8}(b_n - a_n)^3$ | ⑧ $\frac{1}{2}(b_n - 2a_n)$ | ⑨ $\frac{1}{4}(b_n - 2a_n)$ |
| ⑩ $\frac{1}{8}(b_n - 2a_n)$ | | |

〔Ⅱ〕

2つの行列

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 72 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

について、 P が逆行列を持ち、 $B = P^{-1}AP$ が

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の形となるように、定数 x , α , β の値を求める。 P は逆行列をもつから

$$x \neq \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \tag{1}$$

である。また B , P , A の関係式より $AP = PB$ となる。これより

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{ウエ}} & -45 + 72x \\ \boxed{\text{オ}} & -18 + 27x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha & 3\beta \\ \alpha & \beta x \end{pmatrix}$$

となり、

$$\alpha = \boxed{\text{オ}}$$

$$-45 + 72x = 3\beta \tag{2}$$

$$-18 + 27x = \beta x \tag{3}$$

が得られる。

(2), (3)より

$$4x^2 - \boxed{\text{カ}}x + 3 = 0$$

となる。(1)より $x = \boxed{\text{キ}}$, また (2)より $\beta = \boxed{\text{ク}}$ となる。

次に n を自然数として A^n を求める。 B の n 乗は

$$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。 A^2 は

$$A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB \boxed{\text{ケ}} P^{-1}$$

であるが、この関係は (4) を用いて A^n についても一般化できる。この一般化した式について x , α , β の値を代入すると

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{コ}}^n \cdot (\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \cdot \boxed{\text{ス}}^n) & 12 \cdot \boxed{\text{コ}}^n \cdot (-\boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ス}}^n) \\ \boxed{\text{コ}}^n \cdot (1 - \boxed{\text{ス}}^n) & \boxed{\text{コ}}^n \cdot (-3 + 4 \cdot \boxed{\text{ス}}^n) \end{pmatrix}$$

となる。

〔Ⅲ〕

複素数 z_1, z_2 を

$$z_1 = \frac{2}{-1+i}, z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

とおく。

- (1) n を自然数として, z_1, z_2^n を極形式で表すと

$$z_1 = \sqrt{\boxed{\text{ア}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi \right)$$

$$z_2^n = |z_2^n| \left(\cos \frac{n}{\boxed{\text{エ}}} \pi + i \sin \frac{n}{\boxed{\text{エ}}} \pi \right)$$

となる。ここで,

$$f(n) = |\arg z_1 - \arg z_2^n|$$

とおく。ただし, $\arg z$ は z の偏角を表す ($0 \leq \arg z < 2\pi$)。条件 $0 \leq f(n)$

$< 2\pi$ のもとで $f(n)$ を最小にする n は小さい方から $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ である。

- (2) 複素数平面上の 2 点 z_2^4 と z_2^5 はそれぞれ

$$z_2^4 = \frac{\boxed{\text{キク}}}{2} + i \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{2}, z_2^5 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{2} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} + i \frac{\boxed{\text{シ}}}{2}$$

であるから, この 2 点を通る直線は, $z = x + iy$ とおくとき

$$2x - \boxed{\text{ス}}y + \boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} = 0$$

となる。

- (3) n を自然数として, 複素数平面上の 2 点 z_1, z_2^n と原点を頂点とする三角形の面積を S とする。 S は n の関数である。 S を最大にする n は小さい方から $n = \boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツテ}}$, $\boxed{\text{トナ}}$ である。

そして, その最大値は, $\frac{\boxed{\text{ニ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

[IV]

関数 $f(x)$ を積分

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x \cos \theta + x^2) d\theta$$

で定義する。この $f(x)$ を求める。

下記で、 $\boxed{\text{エ}}$ ， $\boxed{\text{シ}}$ ， $\boxed{\text{ツ}}$ ， $\dots$ ， $\boxed{\text{ニ}}$ の解答方法についてはこの問題の最後の指示に従え。

まず

$$f(-x) = \int_0^\pi \log(1 + \boxed{\text{ア}} x \cos \theta + x^2) d\theta$$

ここで、 $\pi - \theta = y$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(-x) &= \boxed{\text{イ}} \int_\pi^0 \log(1 - \boxed{\text{ウ}} x \cos y + x^2) dy \\ &= \boxed{\text{エ}} \end{aligned}$$

この結果を用いて

$$2f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x^2 \cos \boxed{\text{オ}} \theta + x \boxed{\text{カ}}) d\theta$$

ここで、 $\boxed{\text{キ}} \theta = \alpha$ とおいて

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \int_0^\pi \log(1 - 2x^2 \cos \alpha + x \boxed{\text{カ}}) d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \int_\pi^{\boxed{\text{ケ}}} \log(1 - 2x^2 \cos \alpha + x \boxed{\text{カ}}) d\alpha \end{aligned}$$

上式の第2項は、 $\boxed{\text{コ}} \pi - \alpha = z$ とおくと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \int_\pi^{\boxed{\text{ケ}}} \log(1 - 2x^2 \cos \alpha + x \boxed{\text{カ}}) d\alpha \\ &= \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \int_{\boxed{\text{サ}}}^\pi \log(1 - 2x^2 \cos z + x \boxed{\text{カ}}) dz \end{aligned}$$

したがって、 $2f(x) = \boxed{\text{シ}}$ である。これより、 $f(\pm 1) = \boxed{\text{ス}}$ である。

これをくり返して、 n を自然数とすると

$$f(x) = \frac{1}{\boxed{\text{セ}}^n} f(x \boxed{\text{ソ}}^n)$$

が成り立つ。

ここで、 $|x| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \boxed{\text{ソ}}^n = \boxed{\text{タ}}$$

であるから、 $|x| < 1$ のとき、 $f(x) = \boxed{\text{チ}}$ となる。

次に、 $|x| > 1$ のとき、 $y = \frac{1}{x}$ とおく。 $|y| < 1$ であるから、上の結果を使って

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \log\left(1 - \frac{2}{\boxed{\text{ツ}}} \cos \theta + \frac{1}{\boxed{\text{テ}}}\right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \log\left(1 - \boxed{\text{ト}} \cos \theta + \boxed{\text{ナ}}\right) d\theta - \pi \log \boxed{\text{ニ}} \\ &= \pi \log x \boxed{\text{ヌ}} \end{aligned}$$

となる。

ただし、 $\boxed{\text{エ}}$ 、 $\boxed{\text{シ}}$ については以下の①～⑨のうちから1つを選ぶ。

- ① $2f(x)$ ② $f(2x)$ ③ $f(x)$ ④ $f(x+1)$
⑤ $-f(x)$ ⑥ $2f(-x)$ ⑦ $-f(x^2)$ ⑧ $f(x^2)$
⑨ $2f(x^2)$ ⑩ $f(2x^2)$

また、 $\boxed{\text{ツ}}$ 、 $\boxed{\text{テ}}$ 、 $\boxed{\text{ト}}$ 、 $\boxed{\text{ナ}}$ 、 $\boxed{\text{ニ}}$ については以下の①～⑨のうちから1つを選ぶ。

- ① y ② $2y$ ③ $-2y$ ④ $y-1$
⑤ $2y+1$ ⑥ $2y^2$ ⑦ y^2 ⑧ $\frac{1}{2}y^2$
⑨ y^2+1 ⑩ $y^2 - \frac{1}{2}$