

〔Ⅰ〕〔必答問題〕つぎの問いの答えをそれぞれの解答欄に書き入れよ(答のみでよい)。

(1) $\frac{1}{3-\sqrt{11}}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $a^2 + ab + b^2$ の値は ア となる。

(2) 点(2, 1)を通り、円 $x^2 + y^2 = 4$ と接する直線の方程式は イ である。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $2\cos^2\theta + 5\sin\theta + 1$ の最大値は ウ である。

(4) 5個の数字0, 1, 2, 3, 4のうちから1つずつ3個とってつくられる3桁の整数のうち、2で割り切れる整数は エ 個、3で割り切れる整数は オ 個である。

(5) $f(x) = x^3 + kx^2 + x + 1$ が $x > 0$ の領域で極小値をもつような k の範囲は カ である。

〔Ⅱ〕〔選択問題〕つぎの問題〔A〕,〔B〕,〔C〕より2問を選んで答えよ(選択する問題記号を解答用紙の ☐ 内に明記すること)。ただし、答えだけではなく、途中経過も必ず示せ。

〔A〕実数 x, y について、関数 f は以下の関係を満たす。

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = -3f(x)f(y)$$

ただし、 $f(1) \neq 0$ とする。

(1) $f(1), f(-1), f(5)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(5) - 2f(x)f(x+2)$ の最大値とこのときの x の値を求めよ。

〔B〕濃度の異なる3種類の食塩水が容器A, B, Cにそれぞれ l [kg] ずつ入っている。いま、Aから a [kg] だけ取り出してBに入れ攪拌する。続いてこのBから食塩水を a [kg] 取り出し、Cに入れ攪拌する。その後Cから a [kg] 取り出してAに入れて攪拌する。これらの操作によりAの食塩水の濃度は p % から $\frac{3}{2}p$ % へ、Cは $2p$ % から $\frac{5}{2}p$ % へ変化したという。

- (1) 各容器から取り出した食塩水の量 a はどれほどであるか。 l を用いて表せ。
- (2) これらの操作によって B の食塩水の濃度は $x\%$ から $y\%$ へ変化した。
 x, y をそれぞれ p を用いて表せ。
- 〔C〕 次の文を読み、下の問いに答えよ。
- ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

M君は、本を読んでいて、面白そうな以下の一文を見つけ、興味を持った。それは、「18 世紀の偉大な数学者オイラーは、

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

を満たす自然数の解 (x, y, z, w) は存在しないであろうと考えていた。

しかし予想に反し、1988 年にアメリカのエルキーズによって、つぎの①のような一つの解が発見された。

$$x = 2682440, y = 15365639, z = 18796760, w = 2061567 \boxed{} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

その上、解は無数に存在することも示された。」

というものであった。

ところが、残念なことに、①に示された解の組のうち最後の w の一桁目の数字 ($\boxed{}$) が、印刷が不鮮明なため判読できなかった。

M君は、 x^4, y^4, z^4 の和を求めることにより、その数字を決定しようと、手始めに z の 4 乗を電卓で計算し始めたが、桁数が多すぎて計算できなかった。^(a)

そこで、まず $\boxed{}$ ^(b)として明らかに数学的に不適当と考えられるいくつかの数は除外した上で、いろいろと計算を試みた結果、最終的に、 $\boxed{}$ ^(c)として正しい数を確定することができた。

- (1) 下線部(a)で、実際には z^4 は何桁の整数となるか示せ。
- (2) 下線部(b)で、整数 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のうちで、
 $\boxed{}$ として明らかに数学的に不適当ないくつかの数とは、どの数のことか。理由を付して答えよ。
- (3) 下線部(c)の正しい数を確定せよ。