

[I]

(1) 行列 A, B, C, X を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする。

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{ウエ}} & \boxed{\text{アイ}} \end{pmatrix}$$

であり

$$ABX = AC$$

をみたす x, y は

$$x = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}, y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

(2) 周囲の長さを l ，対角線の長さを d とする長方形の面積 S は

$$S = \frac{l^2}{\boxed{\text{ス}}} - \frac{d^2}{\boxed{\text{セ}}}$$

で表される。

周囲の長さが l ，対角線の長さが d の長方形が存在するための必要十分条件は

$$\frac{\sqrt{2}l}{\boxed{\text{ソ}}} \leq d < \frac{l}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

((I)の問題は次ページに続く。)

(3) 1, 2, 3, 4, 5 の数が1つ書かれているカードがそれぞれ4枚ずつ、合計20枚ある。この中から2枚のカードを抜きだす。

(i) 2枚のカードに書かれている数が同じである確率は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(ii) 2枚のカードに書かれている数の差が2である確率は $\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

(iii) 2枚のカードに書かれている数の最大値(等しいときは書かれている数)が4である確率は $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

〔Ⅱ〕

x の方程式

$$x^3 - 3x^2 + 4x + 8 = 0$$

の実数解を a ，虚数解を $z_1 = p + qi$ ， $z_2 = p - qi$ とし，複素数平面において， a に対応する点を A ， z_1 に対応する点を B ， z_2 に対応する点を C とする。ここで a ， p ， q は実数とし， $q > 0$ とする。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 8$ とおくと

$$f(x) = (x + \boxed{\text{ア}}) (x^2 - \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}})$$

と因数分解され

$$p = \boxed{\text{エ}}, q = \boxed{\text{オ}}$$

となる。

- (2) z_1 の偏角 θ を $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えると, $\theta = \boxed{\text{カキ}}$ $^\circ$ であり, z_1^n が負の実数となるような n は, k を整数として

$$n = \boxed{\text{ク}} k + \boxed{\text{ケ}}$$

で表されるときに限る。

- (3) 複素数平面における三角形 ABC を考えると

$$\cos A = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}, \quad \sin A = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

であり, 三角形 ABC の外接円は, 複素数平面において

$$\left| z - \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right| = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

をみたす点 z の集合となる。

〔Ⅲ〕

p を実数として、方程式

$$y = x^3 + px^2 - 3x + 2 \quad \dots\dots\dots ①$$

で表される曲線 ① を考える。

曲線 ① 上の点 $A(a, b)$ における接線の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}} a^{\boxed{\text{イ}}} + \boxed{\text{ウ}} ap - \boxed{\text{エ}} \right) x - \left(\boxed{\text{オ}} a^{\boxed{\text{カ}}} + a^{\boxed{\text{キ}}} p - \boxed{\text{ク}} \right) \quad \dots\dots\dots ②$$

である。

特に、点 $B(0, 2)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ケコ}} x + \boxed{\text{サ}} \quad \dots\dots\dots ③$$

である。

- (1) $p = 2$ のとき、曲線 ① と接線 ③ の B 以外の交点 C の座標は
 $(\boxed{\text{シス}}, \boxed{\text{セ}})$ である。

また、線分 BC と曲線 ① で囲まれる部分の面積は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。)

(2) $p = 0$, $a > 0$ とする。このとき、接線 ② は曲線 ① と A 以外の点 D (c, d) で交わり、 $\boxed{\text{チ}}$ が成り立つ。

また、線分 AD と曲線 ① で囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} a^{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

ただし、 $\boxed{\text{チ}}$ については以下の ⑩ ~ ⑲ のうちから 1 つを選べ。

- ⑩ $c - a = 0$ ⑪ $c - a + 1 = 0$ ⑫ $2c - a = 0$
 ⑬ $2c + a = 0$ ⑭ $2a - c = 0$ ⑮ $2a + c = 0$
 ⑯ $2c + a + 1 = 0$ ⑰ $2c + a - 1 = 0$ ⑱ $2a + c + 1 = 0$
 ⑲ $2a + c - 1 = 0$

[IV]

目盛りのない定規とコンパス K を用いて作図を行う。 K は長さ 1 の半径の円だけを描くことができるとする。また、角度はすべてラジアンで表されるものとする。

(1) 角度 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたし、 $\angle XOY = \theta$ とする。以下の手順に従って、定規とコンパス K を用いて θ を 2 等分することができる。

(a) K により O を中心とする円を描き、半直線 OX との交点を A 、半直線 OY との交点を B とする。

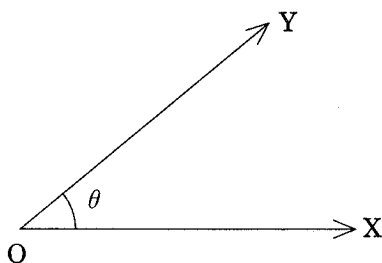
(b) K により A 、 B を中心とする円をそれぞれ描き、 O ではない交点を C とする。

(c) 定規により 2 点 O 、 C を通る直線进行かくと、 $\angle XOC = \angle COY = \frac{\theta}{2}$ となる。

$AB = d$ とするとき $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ を d を用いて表せば

$$\cos \theta = \boxed{\text{ア}} - \frac{d \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\sin \theta = d \sqrt{\boxed{\text{エ}} - \frac{d \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}}$$



となる。

- (2) 角度 ρ ($0 < \rho < \frac{\pi}{2}$) を次々と 2 等分することにより, n を正の整数として次の角度が作図可能となる。

$$\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{8}, \dots, \frac{\rho}{2^n}, \dots$$

初項 $\frac{\rho}{2}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列を $\{a_n\}$ とし, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

で定める。 b_n が表す角度は作図可能であり

$$b_n = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \rho \left(1 + \frac{(-1)^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}} \right)$$

と表されるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \rho$$

が成り立つ。

ただし, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{サ}}$ については, 以下の ① ~ ⑨ のうちから 1 つを選べ。

- ① $-n$ ① $-n+2$ ② $n-2$ ③ n ④ $n+1$
 ⑤ $n+2$ ⑥ $2n$ ⑦ $2n+1$ ⑧ n^2 ⑨ n^3

(〔IV〕の問題は次ページに続く。)

- (3) 定規とコンパス K を用いて, (1)の手順にしたがって $\frac{3}{2}$ ラジアンを k 回 2 等分して

$\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{2^k}$ ラジアン
 になったとする。

(1) において $d = \sqrt{\frac{2}{265}}$ とすると

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}} = 0. \boxed{\text{テトナニ}}$$

である。ここで, 小数点以下第 5 位を四捨五入して計算するものとする。

また, $\alpha - \sin \theta$ の値が正であるような最大の整数 k の値は $\boxed{\text{又}}$ である。

α

(以 上)