

[I]

(1) 162 を素因数分解すると

$$162 = \boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}^{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。集合 A を

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 162\}$$

とおくとき、3 の倍数となる A の要素の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ ，2 の倍数となる A の要素の個数は $\boxed{\text{カキ}}$ ，2 でも 3 でも割り切れる A の要素の個数は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

したがって、分母が 162 で、分子が A の要素である分数

$$\frac{1}{162}, \frac{2}{162}, \frac{3}{162}, \dots, \frac{162}{162}$$

の中の既約分数の個数は $\boxed{\text{コサ}}$ である。

([I] の問題は次ページに続く。)

- (2) a, b を定数とし、行列 A を

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

とする。

- (i) $A^2 = A$ が成り立つのは、 $a = \boxed{\text{シ}}$ ， $b = \boxed{\text{ス}}$ ，または $a = \boxed{\text{セソ}}$ ，
 $b = \boxed{\text{タ}}$ のときである。

- (ii) k を定数、 E を 2 次の単位行列とする。 $A^2 = A$ が成り立つとき、 x, y の
連立 1 次方程式

$$(A - kE) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が無数の解をもつときの k の値は、小さい順に $\boxed{\text{チ}}$ または $\boxed{\text{ツ}}$ である。

〔Ⅱ〕

- (1) 平行四辺形 ABCD について $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とする。辺 BC を 4 : 9 に内分する点を E とし, AE と BD の交点を P とする。

定数 s, t が, $0 \leq s \leq 1$, $0 < t < 1$ の範囲にあるとして, ベクトル $\overrightarrow{AP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= s \vec{a} + \left(\boxed{\text{ア}} - s \right) \vec{b} \\ &= t \vec{a} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}} t \vec{b}\end{aligned}$$

のように 2 通りに表すことができる。したがって

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}} \vec{b}$$

である。

(〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。)

(2) 半径 1 の円に内接する正 24 角形がある。この正 24 角形の 3 つの頂点をとって三角形を作る。すべての三角形のうち、その面積がもっとも小さい三角形の

面積を S とする。 $\sin 15^\circ = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ソ}}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ なので、これを利用し

て $S = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ となる。また、すべての三角形のうち、そ

の面積がもっとも大きいものは、円に内接する正三角形であり、その面積は

$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

ただし、 $\boxed{\text{シ}}$ については、以下の ①～⑦ のうちから 1 つを選べ。

- | | |
|---|---|
| ① $\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$ | ① $\cos 45^\circ \sin 30^\circ - \sin 45^\circ \cos 30^\circ$ |
| ② $\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$ | ③ $\sin 45^\circ \sin 30^\circ - \cos 45^\circ \cos 30^\circ$ |
| ④ $\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ | ⑤ $\cos^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ$ |
| ⑥ $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$ | ⑦ $\sin^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ$ |

〔Ⅲ〕

a を正の定数として、方程式

$$x^3 - 3x + a = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

が異なる 3 つの実数解 α, β, γ をもつとする。ただし、 $\alpha < \beta < \gamma$ とする。

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

とおく。 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき、極小値 $\boxed{\text{イウ}}$ 、 $x = \boxed{\text{エオ}}$ のとき、極大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。そして、 $y = f(x)$ のグラフは、原点以外では x 軸と小さい順に、 $x = \boxed{\text{キ}}$ と $x = \boxed{\text{ク}}$ で交わる。このグラフと直線 $y = -a$ との交点の x 座標が α, β, γ であることより、 $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ の大小関係については $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。

ただし、 $\boxed{\text{キ}}$ 、 $\boxed{\text{ク}}$ については、10 ページの A 群の ①～⑨ のうちから、 $\boxed{\text{ケ}}$ については、B 群の ①～⑨ のうちから 1 つを選べ。

(〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。)

(2) 次に

$$g(x) = x^3 - 3x + a$$

とおく。方程式①が異なる3つの実数解をもつのは、 $\boxed{\text{コ}} < a < \boxed{\text{サ}}$ のときである。

(i) $g(a) \leq 0$ となるのは、 $\boxed{\text{シ}} < a \leq \boxed{\text{ス}}$ のときである。これより、 a と $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ の大小関係については $\boxed{\text{セ}}$ が成り立つ。

(ii) $g(a) > 0$ となるのは、 $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときである。このとき、 $g(-a)$ の符号より、 a と $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ の大小関係については $\boxed{\text{チ}}$ が成り立つ。

ただし、 $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{ソ}}$ については、10ページのA群の⑩～⑪のうちから、 $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ については、C群の⑩～⑪のうちから1つを選べ。

(〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。)

A 群

- ① $-\sqrt{2}$ ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $1-\sqrt{2}$
 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$ ⑥ $1+\sqrt{3}$ ⑦ $-\sqrt{3}$
 ⑧ $-2\sqrt{3}$ ⑨ $1+2\sqrt{3}$

B 群

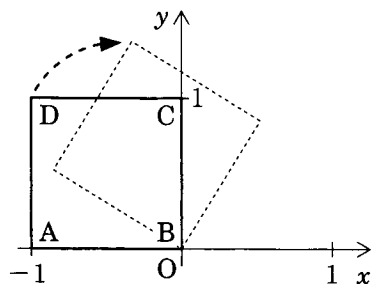
- ① $|\alpha| < |\beta| < |\gamma|$ ① $|\alpha| < |\gamma| < |\beta|$ ② $|\beta| < |\alpha| < |\gamma|$
 ③ $|\beta| < |\gamma| < |\alpha|$ ④ $|\gamma| < |\alpha| < |\beta|$ ⑤ $|\gamma| < |\beta| < |\alpha|$
 ⑥ $|\alpha| \leq |\beta| < |\gamma|$ ⑦ $|\beta| \leq |\alpha| < |\gamma|$ ⑧ $|\gamma| < |\beta| \leq |\alpha|$
 ⑨ $|\gamma| < |\alpha| \leq |\beta|$

C 群

- ① $|\alpha| < a < |\gamma|$ ① $|\alpha| \leq a < |\beta|$ ② $|\beta| < a < |\alpha|$
 ③ $|\beta| < a \leq |\gamma|$ ④ $|\gamma| < a < |\beta|$ ⑤ $|\gamma| \leq a < |\alpha|$
 ⑥ $|\beta| \leq a < |\gamma|$ ⑦ $|\gamma| < a < |\alpha|$ ⑧ $|\beta| \leq a < |\alpha|$
 ⑨ $|\alpha| < a < |\beta|$

〔Ⅳ〕

1 辺の長さ 1 の正方形 ABCD が図のように置かれている。いま、この正方形が頂点 B を中心に、時計回りに辺 BC が x 軸と重なるまで回転する。このときの頂点 D の軌跡を T_1 とする。さらに、この回転後の正方形を、頂点 C を中心に辺 CD が x 軸と重なるまで時計回りに回転させる。このときの頂点 D の軌跡を T_2 とする。



(〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。)

- (1) 軌跡 T_1 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線 ℓ が軌跡 T_2 と接するとき、この接点 P の座標 (x_1, y_1) を求める。

接線 ℓ の方程式と軌跡 T_2 の方程式から、 x についての 2 次方程式

$$x^2 + (x_1^2 + ax_1 + b)x + c = 0 \dots\dots\dots ①$$

が得られ、 $a = \boxed{\text{アイ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ウエ}}$ 、 $c = \boxed{\text{オ}}$ となる。接線 ℓ が T_2 に接することから、①の 2 次方程式は重解をもち、判別式を D とすると

$$D = x_1^4 + dx_1^3 + ex_1 + f = 0$$

となり、 $d = \boxed{\text{カキ}}$ 、 $e = \boxed{\text{ク}}$ 、 $f = \boxed{\text{ケコ}}$ である。これを x_1 について解くと 4 つの解が得られる。ここで x_1 の存在範囲を考慮することによって

$x_1 = \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \boxed{\text{ス}}$ 、 $y_1 = \boxed{\text{セ}} \sqrt{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} - \boxed{\text{タ}}}$ と求められる。

(〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。)

- (2) 接線 ℓ と T_2 , および直線 $x = 1$, $x = 2$ によって囲まれる面積を S とする。接線 ℓ の方程式を $y = f(x)$ とするとき, 面積 S は

$$S = \int_1^2 f(x) dx - \boxed{\text{チ}}$$

$$= \left(\frac{\boxed{\text{ツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{4} \right) \sqrt{\sqrt{\boxed{\text{ト}}} - \boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{チ}}$$

となる。

ただし, $\boxed{\text{チ}}$ については, 以下の ①～⑨ のうちから 1 つを選べ。

- | | | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| ① $\frac{\pi}{8}$ | ① $\frac{\pi}{4}$ | ② $\frac{\pi}{3}$ | ③ $\frac{\pi}{2}$ | ④ $\frac{2\pi}{3}$ |
| ⑤ π | ⑥ $\frac{3\pi}{2}$ | ⑦ 2π | ⑧ $\frac{5\pi}{2}$ | ⑨ 4π |

(以 上)