

[I]

(1) PはCD上にあるので  $0 \leq t \leq 1 \cdots (*)$

$AC=1, \angle ACP=60^\circ$  であるから, 余弦定理より

$$\begin{aligned} AP^2 &= AC^2 + CP^2 - 2AC \cdot CP \cdot \cos \angle ACP \\ \therefore l^2 &= 1^2 + t^2 - 2 \cdot 1 \cdot t \cdot \cos 60^\circ \\ &= t^2 + t - 1 \end{aligned}$$

$l > 0$  より  $l = \sqrt{t^2 + t - 1}$

(2) ABCDは正四面体であるから  $\triangle ACP \equiv \triangle BCP$  より  $AP = BP = l$   
余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{l^2 + l^2 - 1}{2 \cdot l \cdot l} = \frac{2l^2 - 1}{2l^2} \\ \sin \angle APB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle APB} \\ &= \sqrt{1 - \left( \frac{2l^2 - 1}{2l^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{2l^2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \sin \angle APB \\ &= \frac{1}{2} l^2 \frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{2l^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4l^2 - 1} = \frac{1}{4} \sqrt{4t^2 - 4t + 3} \\ \therefore S &= \frac{1}{4} \sqrt{4t^2 - 4t + 3} \end{aligned}$$

(3)  $S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + 2}$  であるから

(\*)よりSが最小になるのは  $t = \frac{1}{2}$  のときで  $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$S = \frac{\sqrt{5}}{2} m \text{ より } \frac{1}{4} \sqrt{4t^2 - 4t + 3} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4}$$

両辺2乗して整理すると

$$8t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

これはどちらも(\*)を満たす。

したがって  $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$

## 〔Ⅱ〕

(1) 操作後 A の赤球が 1 個になるのは, A と B から同じ色の球を取り出して交換したときだから

$$(i) \text{ A, B の両方から赤球を取り出す確率は } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$(ii) \text{ A, B の両方から白球を取り出す確率は } \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$(i), (ii) \text{ は排反なので, 求める確率は } \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(2) 2 回の操作後 A の赤球が 3 個になるのは, 1, 2 回目のどちらも A から白球, B から赤球を取り出して交換したときだから

$$\cdot 1 \text{ 回目の操作で A から白球, B から赤球を取り出す確率は } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$\cdot$  2 回目の操作で A から白球, B から赤球を取り出す確率は, A, B の袋の中の

$$\text{赤白の球数に注意すると } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{したがって, 求める確率は } \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$$

(3) 余事象で考える.

2 回の操作後, 片方の袋にしか赤球が入っていないのは

(i) A が赤球 3 個のみ, B が白球 3 個のみの場合

(ii) A が白球 3 個のみ, B が赤球 3 個のみの場合

のどちらかである.

(i) の確率は (2) より  $\frac{4}{81}$  である.

(ii) の場合

$\cdot$  1 回の操作で赤球の数は高々 1 つしか変化しない

$\cdot$  1 回目の操作後に A の赤球が 0 個の場合, 2 回目の操作で必ず A の白球と B の赤球を交換することになるので操作後 A の赤球の数が 1 個になる

これらの事実から, 2 回目の操作後に A の赤球が 0 個になるのは

① 1 回目の操作後 A の赤球が 1 個となり

② 2 回目の操作で A の赤球と B の白球を交換する

場合だけである.

① の確率は (1) より  $\frac{4}{9}$

② の確率は

赤 1 白 2 の A の袋から赤球, 赤 2 白 1 の B の袋から白球を選ぶから

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{したがって (ii) の確率は } \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$$

(i) と (ii) は排反であるから, 2 回の操作後に片方の袋にしか赤球が入っていない

$$\text{確率は } \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{8}{81}$$

$$\text{したがって, 求める確率は } 1 - \frac{8}{81} = \frac{73}{81}$$

〔法学部Ⅲ〕 および 〔文学部Ⅲ〕

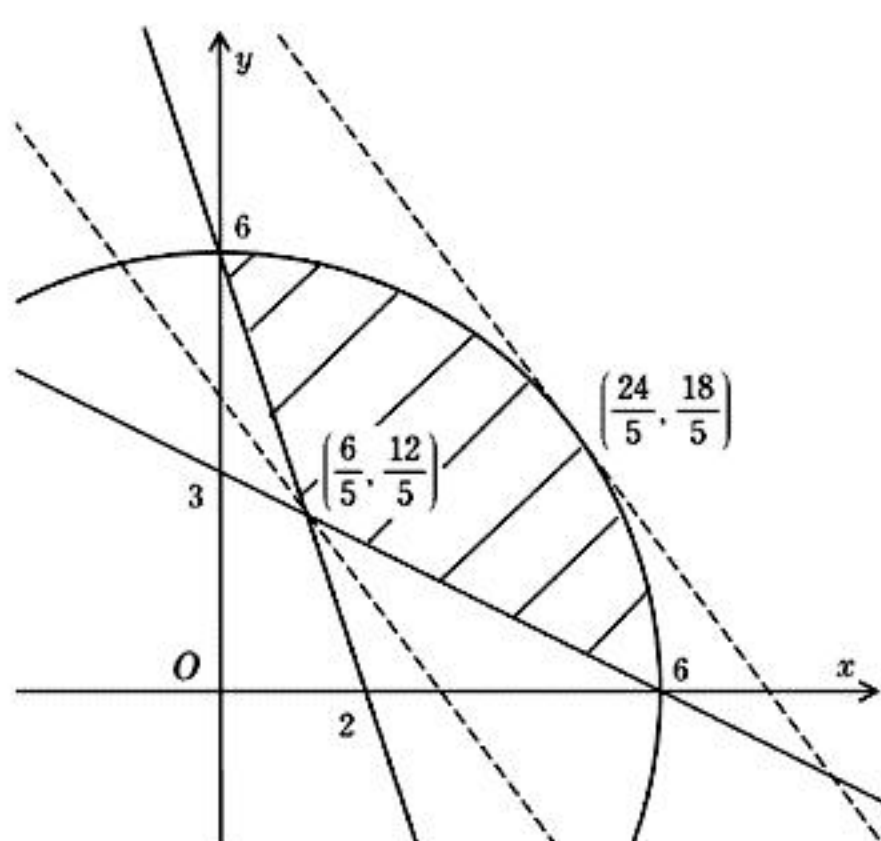
求める領域は下図の斜線部 (境界線を含む) .

また,  $4x+3y=k$  とおくと,

・  $k$  が最大になるのは, 直線  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{k}{3}$  が円  $x^2 + y^2 = 36$  と点  $(\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$  で接するときで, このとき  $k=30$

・  $k$  が最小になるのは, 直線  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{k}{3}$  が点  $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$  を通るときで  
このとき  $k=12$

したがって,  $4x+3y$  の最大値は 30 , 最小値は 12



〔経営学部Ⅲ〕

(1)  $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}(a+1)x + 3a$  を平方完成すると

$$y = \frac{3}{4}\{x - (a+1)\}^2 - \frac{3}{4}(a-1)^2$$

となるので,  $2 \leq a \leq 5$  のとき  $-\frac{3}{4}(a-1)^2 < 0$  より必ず  $x$  軸と異なる 2 点で交わる. また,

$$y = \frac{3}{4}(x-2)(x-2a)$$

と因数分解できるので, 交点の  $x$  座標は  $x=2$  と  $x=2a$  である.

$2 \leq a \leq 5$  より  $2 < 2a$  であるから

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^{2a} \left\{ -\frac{3}{4}(x-2)(x-2a) \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} (2a-2)^3 \\ &= (a-1)^3 \end{aligned}$$

$$\therefore S(a) = (a-1)^3$$

(2)  $T(a) = S(a) - 12a$  とおく

$$\begin{aligned} T(a) &= (a-1)^3 - 12a \\ &= a^3 - 3a^2 - 9a - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'(a) &= 3a^2 - 6a - 9 \\ &= 3(a-3)(a+1) \end{aligned}$$

$2 \leq a \leq 5$  より  $T(a)$  の増減表は以下のようになる.

|         |     |            |     |            |     |
|---------|-----|------------|-----|------------|-----|
| $a$     | 2   |            | 3   |            | 5   |
| $T'(a)$ | (-) | -          | 0   | +          | (+) |
| $T(a)$  | -23 | $\searrow$ | -28 | $\nearrow$ | 4   |

よって  $-28 \leq T(a) \leq 4$

$$\therefore -28 \leq S(a) - 12a \leq 4$$