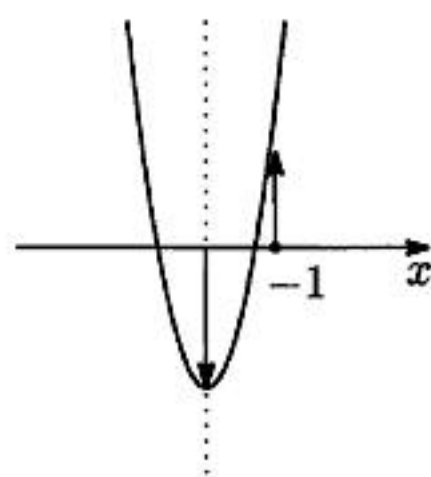


[I] (1) $f(x) = 0$ がともに -1 より小さい 2 つの実数解を持つためには、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが以下の条件を満たせばよい。

$$\begin{cases} \text{(頂点の } y \text{ 座標)} \leq 0 \\ \text{(軸上の点の } x \text{ 座標)} < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$$



$f(x) = (x+a)^2 - a^2 + a + 12$ より、上の条件に当てはめると、

$$\begin{cases} -a^2 + a + 12 \leq 0 & \dots\dots \text{①} \\ -a < -1 & \dots\dots \text{②} \\ -a + 13 > 0 & \dots\dots \text{③} \end{cases}$$

①, ②, ③を解くと、

$$\text{①} \iff a^2 - a - 12 \geq 0$$

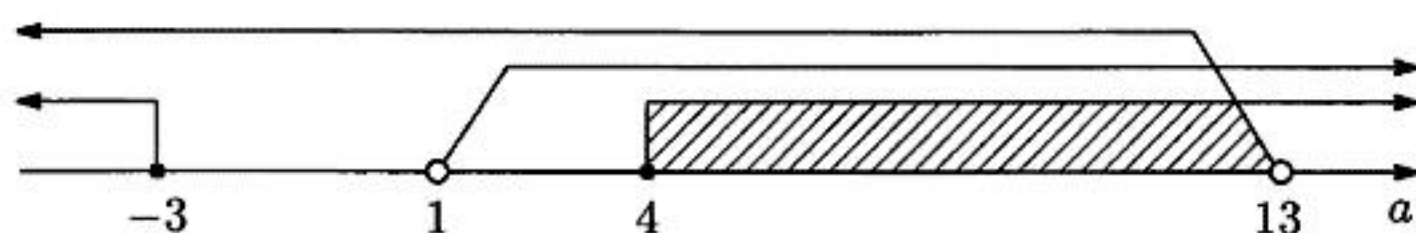
$$\iff (a-4)(a+3) \geq 0$$

$$\iff a \leq -3, 4 \leq a$$

$$\text{②} \iff a > 1$$

$$\text{③} \iff a < 13$$

これらを数直線上に表すと、下のようになる。



よって、3 つの不等式を全て満たす範囲は、上の斜線部で、 $4 \leq a < 13$

(2) $f(x) = (x+a)^2 - a^2 + a + 12$ より、 $g(a) = -a^2 + a + 12$

$$g(a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

より、 $g(a)$ の軸の方程式は、 $a = \frac{1}{2}$

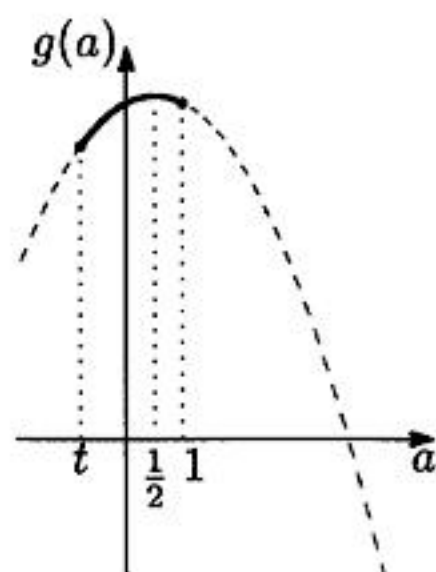
右のようなグラフを描いて、 t の値によって、最大値をとる場所がどこかを読み取ればよい。

(i) $t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$g(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{49}{4}$ をとる。

(ii) $t \geq \frac{1}{2}$ のとき

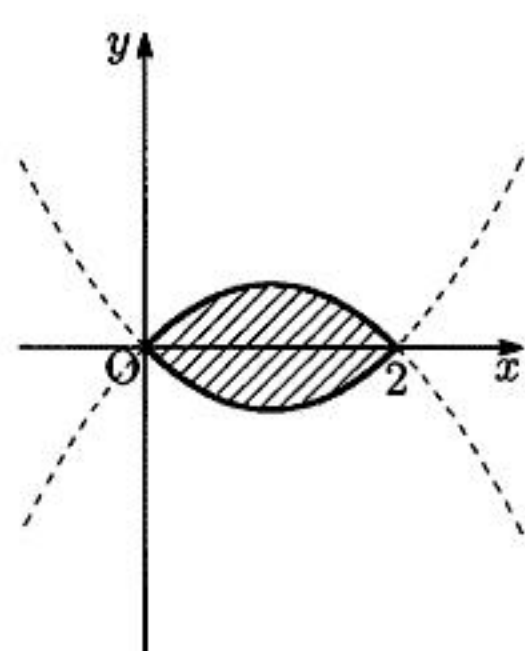
$g(a)$ は $a = t$ のとき最大値 $-t^2 + t + 12$ をとる。



経済 [Ⅱ]

(1) $-x^2 + 2x = |2y|$ より,

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \\ (y \geq 0 \text{ のとき}) \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \\ (y \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



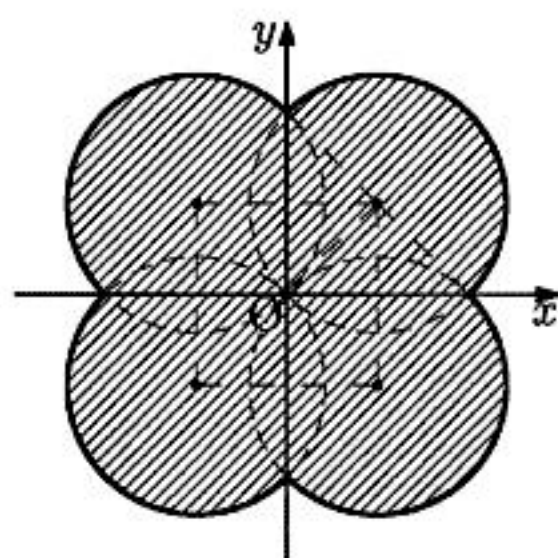
面積を求める領域は、右の斜線部である。

よって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + x - \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \right\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) $x^2 + y^2 = |2x| + |2y|$ より,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (x \geq 0, y \geq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + y^2 = 2x - 2y \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ (x \geq 0, y \leq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + y^2 = -2x + 2y \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (x \leq 0, y \geq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + y^2 = -2x - 2y \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ (x \leq 0, y \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



これらで囲まれた領域を図示すると、右のようになる。

この領域のうち、第1象限にある部分は、円から x 軸より下、 y 軸より左の部分を除いたものだから、その面積は

$$\pi(\sqrt{2})^2 - 2 \left\{ \pi(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \right\} = \pi + 2$$

よって求める面積は $4(\pi + 2)$

社会学部 [Ⅱ]

(R) $p = q^2 - 2 \cdots \textcircled{A}$, $q^2 + r^2 = 4 \cdots \textcircled{B}$, $p > 0, q > 0, r > 0 \cdots \textcircled{C}$

(1) ① $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ より

$$\begin{aligned} q^2 r^2 &= (p+2)(4-q^2) \\ &= (p+2)\{4-(p+2)\} \\ &= 4(p+2) - (p+2)^2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 r^2 &= p^2 + 4(p+2) - (p+2)^2 \\ &= p^2 + 4p + 8 - p^2 - 4p - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

② $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ より,

$$q^2 - r^2 = q^2 - (4 - q^2) = 2q^2 - 4 = 2(p+2) - 4 = 2p > 0$$

すなわち

$$q^2 - r^2 = (q+r)(q-r) > 0$$

ここで $\textcircled{C}$ より $q+r > 0$

よって $q-r > 0$ すなわち $r < q$

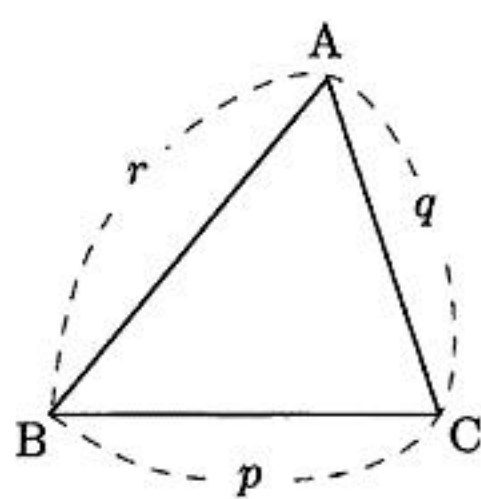
(2) $BC = p, CA = q, AB = r$ として一般性を失わない。

① 正弦定理より,

$$\frac{p}{\sin A} = 2R$$

ここで余弦定理と $\textcircled{B}$ より,

$$\cos A = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr} = \frac{4 - p^2}{2qr}$$



ゆえに (1) ①より

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - p^2}{2qr} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(4 - p^2)^2}{4(4 - p^2)}} = \frac{p}{2}$$

よって

$$R = \frac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}p} = 1$$

② $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、①より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} qr \sin A = \frac{1}{4} pqr \\ S^2 &= \frac{1}{16} p^2 q^2 r^2 = \frac{1}{16} p^2 (4 - p^2) \\ &= \frac{1}{16} \{ -(p^2 - 2)^2 + 4 \} \end{aligned}$$

よって S^2 は $p^2 = 2$ すなわち $p = \sqrt{2}$ のとき、最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

すなわち $p = \sqrt{2}$ のとき S は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

経済 [Ⅲ]

(1) $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ を変形すると,

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2-a_n} - 1 = \frac{a_n - 1}{1-(a_n - 1)}$$

$c_n = a_n - 1$ とおくと,

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{1-c_n}$$

両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{c_n} - 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_n} = -1$$

数列 $\left\{ \frac{1}{c_n} \right\}$ は初項 $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{a_1-1} = -2$, 公差 -1 の等差数列だから,

$$\frac{1}{c_n} = -2 + (n-1) \cdot (-1) = -(n+1)$$

ゆえに

$$c_n = -\frac{1}{n+1}$$

よって

$$a_n = c_n + 1 = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ とおくと, $n \geq 2$ のとき,

$$a_n + b_n = S_n - S_{n-1} = n - (n-1) = 1$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって

$$b_1 = 1 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

求める漸化式は,

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{b_n}{1+b_n}$$

社会学部 [Ⅲ]

(1) 2 回目が終わった時点で, x が $\frac{1}{6}$ 未満となるのは, 2 回ともかける数と

して $\frac{1}{3}$ を選んだ場合で, その場合の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ であるから,

余事象の確率より, 求める確率は

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(2) 2 回が終わった時点での x の値は, $x = \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$

$x = \frac{1}{9}$ となるのは, かける数として 2 回とも $\frac{1}{3}$ を選んだ場合だから, 確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$x = \frac{1}{6}$ となるのは, かける数として $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ を選んだ場合だから, 確率は

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

同様にして x に対応する確率 p を求めると, 以下の表のようになる.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	計
p	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	1

よって求める期待値は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{16 + 72 + 81 + 108 + 36}{2^4 \cdot 3^4} \\ &= \frac{361}{1296} \end{aligned}$$

(3) 3 回目が終わった時点で, $0.1 = \frac{1}{10}$ 以下となるのは, かける数として,

$\frac{1}{3}$ が 3 回選ばれた場合と, $\frac{1}{3}$ が 2 回, $\frac{1}{2}$ が 1 回選ばれた場合と,

$\frac{1}{3}$ が 1 回, $\frac{1}{2}$ が 2 回選ばれた場合であるから, 求める確率は,

$$\begin{aligned} & {}_3\text{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3\text{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + {}_3\text{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{27 + 18 + 4}{108} \\ &= \frac{49}{108} \end{aligned}$$