

〔1〕

(1) まず, 1 ~ 3 試合目を全敗しない確率は, 余事象で考えて

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$$

残りの 4, 5 試合目はどのような結果になってもよいので

$$\text{求める確率は } \frac{26}{27} \times 1 \times 1 = \frac{26}{27}$$

(2) 5 試合でちょうど 2 勝する確率は

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

(3) 2 勝のとき勝ち点の最大値は 2 勝 3 分けの 9 点であるから, 勝ち点が 10 点以上になるのは 3 勝 1 分け以上のときである.

(勝ち数, 分け数, 負け数) と書くことにすると, 条件を満たすのは

$$(3, 1, 1), (3, 2, 0), (4, 0, 1), (4, 1, 0), (5, 0, 0)$$

の 5 つの場合で, それぞれの確率は

$$(3, 1, 1) : \frac{5!}{3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{20}{243}$$

$$(3, 2, 0) : \frac{5!}{3!2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{243}$$

$$(4, 0, 1) : \frac{5!}{4!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{243}$$

$$(4, 1, 0) : \frac{5!}{4!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{243}$$

$$(5, 0, 0) : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

これらはすべて排反であるから, 求める確率は

$$\frac{20 + 10 + 5 + 5 + 1}{243} = \frac{41}{243}$$

〔経済学部Ⅱ〕

(1) $A+B+C=\pi$ より

$$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$$

$$\cos(B+C)=-\frac{1}{3} \text{ より } \cos A=\frac{1}{3} \text{ である. このとき}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\because 0<A<\pi \text{ より } \sin A>0)$$

であるから, $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理より

$$2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2$$

$$\therefore R=1$$

したがって, 外接円の半径は 1

(2) $AC=x, AB=y$ ($x>0, y>0$) とおく. このとき

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin A=\frac{\sqrt{2}}{3}xy \quad \cdots \textcircled{1}$$

正弦定理より

$$2R=\frac{x}{\sin B}=\frac{y}{\sin C}$$

$$\therefore \sin B=\frac{x}{2}, \sin C=\frac{y}{2}$$

ところで, 加法定理より $2\sin B\sin C=\cos(B-C)-\cos(B+C)$ であるから

$$2\cdot \frac{x}{2}\cdot \frac{y}{2}=\cos(B-C)+\frac{1}{3}$$

$$|\cos(B-C)|\leq 1 \text{ および } x>0, y>0 \text{ より } 0<\frac{xy}{2}\leq 1+\frac{1}{3}$$

$$\therefore 0<xy\leq \frac{8}{3} \quad (\text{等号成立は } \cos(B-C)=1 \text{ つまり } B=C \text{ のとき})\cdots \textcircled{2}$$

①, ②より $\triangle ABC$ の最大値は $\frac{8\sqrt{2}}{9}$ であり, このとき $B=C$ より $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形になるから $x=y$ である.

$$\text{よって } xy=\frac{8}{3}, x>0, y>0 \text{ より } x=y=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(これは三角形 ABC の成立条件 $|x-y|<\frac{4\sqrt{2}}{3}<x+y$ を満たしている.)

したがって, $\triangle ABC$ の面積が最大となる AC の長さは $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $A+B+C=\pi$ より

$$\sin B=\sin\{\pi-(A+C)\}=\sin(A+C)=\sin C\cos A+\cos C\sin A$$

$$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos A=\frac{1}{3} \text{ を代入すると}$$

$$\sin B=\frac{1}{3}\sin C+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos C$$

$$\therefore 3\sin B=\sin C+2\sqrt{2}\cos C$$

(証明終)

〔社会学部Ⅱ〕 および 〔現代福祉学部Ⅱ〕

(1) $y=-x^2+4x+2$ を平方完成して

$$y=-(x-2)^2+6$$

よって, 放物線 g の頂点は $(2, 6)$

(2) 点 P と点 Q の座標をそれぞれ $P(x, y), Q(X, Y)$ とおく.

$$PQ \text{ を } 1:2 \text{ に内分する点の座標は } \left(\frac{2x+X}{3}, \frac{2y+Y}{3}\right)$$

これが原点 O と一致するから

$$\frac{2x+X}{3}=0 \text{ かつ } \frac{2y+Y}{3}=0$$

$$\therefore \begin{cases} x=-\frac{X}{2} \\ y=-\frac{Y}{2} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

点 P は g 上を動くので $(*)$ を $y=-x^2+4x+2$ に代入して

$$-\frac{Y}{2}=-\left(-\frac{X}{2}\right)^2+4\left(-\frac{X}{2}\right)+2$$

$$\therefore Y=\frac{1}{2}X^2+4X-4$$

このとき, x の範囲は実数全体なので $(*)$ より X の範囲も実数全体である.

したがって, 求める点 Q の軌跡は $y=\frac{1}{2}x^2+4x-4$ (x は実数全体)

$$(3) \begin{cases} y=-(x-2)^2+6 \\ y=\frac{1}{2}x^2+4x-4=\frac{1}{2}(x+4)^2-12 \end{cases} \text{ が囲む領域は下図のようになる.}$$

$y=x+k$ がこの領域と共通点を持つとき

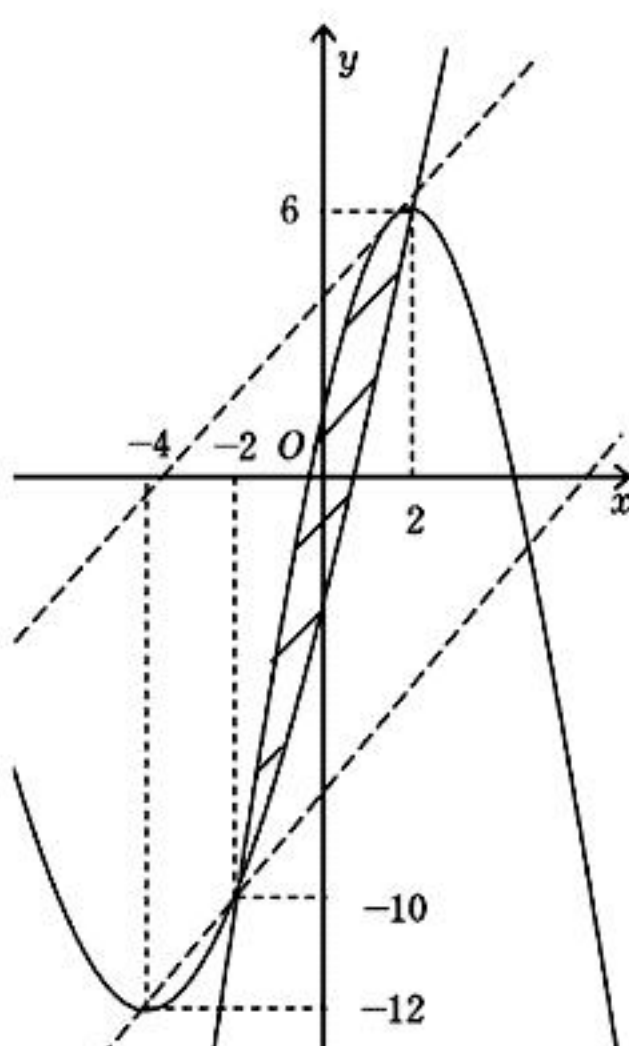
・ k が最大になるのは, 直線 $y=x+k$ が点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{23}{4}\right)$ で $y=-(x-2)^2+6$ と

接するときで, このとき $k=\frac{17}{4}$

・ k が最小になるのは, 直線 $y=x+k$ が点 $(-2, -10)$ を通るときで,

このとき $k=-8$

したがって, 求める k の範囲は $-8\leq k\leq \frac{17}{4}$



$$(1) \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{の両辺を2乗して} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{より}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

であるから、これらを $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$ に代入して

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$$

したがって、 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ならば $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ である。(証明終)

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ はどちらも $\vec{0}$ でないので $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする.

内積の定義より $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{ならば} \quad \cos\theta = 1 \quad \therefore \theta = 0$$

このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行で同じ向きである.

ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ と平行で同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると、

$$\vec{e} \text{ は } \vec{a} \text{ と } |\vec{a}| \text{ を使って} \quad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{と書ける.}$$

$$\text{また, } \vec{e} \text{ は } \vec{b} \text{ と } |\vec{b}| \text{ を使って} \quad \vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{とも書けるので, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \therefore \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

$|\vec{a}|, |\vec{b}|$ は実数で $|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0$ より、 $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ は実数で $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} > 0$ であるから

$$\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \quad \text{とすれば} \quad \vec{a} = \lambda \vec{b} \quad \text{かつ} \quad \lambda \text{ は実数で } \lambda > 0 \quad \text{である.}$$

したがって、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ならば $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ となる実数 $\lambda > 0$ が存在する.

(証明終)

(3) $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda > 0$) のとき

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\lambda \vec{b} + \vec{b}| = |(\lambda + 1)\vec{b}| = |\lambda + 1||\vec{b}| = (\lambda + 1)|\vec{b}| \quad (\because \lambda + 1 > 0)$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\lambda \vec{b}| + |\vec{b}| = |\lambda||\vec{b}| + |\vec{b}| = (|\lambda| + 1)|\vec{b}| = (\lambda + 1)|\vec{b}| \quad (\because \lambda > 0)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

したがって、 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ となる実数 $\lambda > 0$ が存在するならば $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ である. (証明終)

〔社会学部Ⅲ〕 および〔現代福祉学部Ⅲ〕

(1) $ab = a + b + 3$ を変形して

$$(a-1)b = a+3$$

$$a+3 > 0, b > 0 \quad \text{より} \quad a-1 = \frac{a+3}{b} > 0 \quad \text{であるから} \quad b = \frac{a+3}{a-1}$$

このとき

$$a+b = a + \frac{a+3}{a-1} = a+1 + \frac{4}{a-1} = (a-1) + 2 + \frac{4}{a-1}$$

$a-1 > 0$ より $\frac{4}{a-1} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$(a-1) + \frac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{4}{a-1}} = 4$$

等号成立は $a-1 = \frac{4}{a-1}$ より $a=3$ のとき. ($a > 1$ より $a=-1$ は不適)

$$\therefore a+b = (a-1) + \frac{4}{a-1} + 2 \geq 4 + 2 = 6$$

したがって、 $a+b$ の最小値は 6 ($a=b=3$ のとき)

(2) (準備)

O は内接円の中心なので $\angle OBF = \angle OBE = 30^\circ$, $\angle OFB = 90^\circ$, $OF = \sqrt{3}$ より
BF = 3

また、AE = AG, BE = BF, CF = CG であるから、AE = x, CF = y とおくと

$$AB = 3+x, \quad BC = 3+y, \quad AC = x+y \quad (x > 0, y > 0) \quad \text{である.}$$

$\triangle ABC$ について余弦定理より $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ であるから

$$(x+y)^2 = (3+x)^2 + (3+y)^2 - 2(3+x)(3+y) \cdot \cos 60^\circ$$

が成り立つ. 展開して整理すると

$$xy = x + y + 3 \quad \cdots (*)$$

① BC = 5 のとき $3+y=5$ より $y=2$

これを(*)に代入して $2x = x+5$

$$\therefore x = 5$$

したがって、AB = 3+x = 8 ——— (答)

② 内接円の半径を r とすると $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$ であるから

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{3} \{ (3+x) + (3+y) + (x+y) \}$$

$$= \sqrt{3}(x+y+3)$$

———— (答)

また、(1)の結果より $x > 0, y > 0, xy = x+y+3$ のとき $x+y \geq 6$

$$\therefore S = \sqrt{3}(x+y+3) \geq \sqrt{3}(6+3) = 9\sqrt{3}$$

したがって、S の最小値は $9\sqrt{3}$ ($x=y=3$ のとき) ——— (答)