

〔 I 〕 675 を素因数分解すると、 $675 = 3^3 \times 5^2$

$k = \sqrt{n^2 + 675}$ とおいたとき、

$$k^2 - n^2 = 3^3 \times 5^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\iff (k+n)(k-n) = 3^3 \times 5^2$$

$k+n > k-n > 0$ であるから、 $k+n$ 、 $k-n$ の組合せは以下の表の通り。

$k+n$	$3^3 \times 5^2$	$3^2 \times 5^2$	3×5^2	$3^3 \times 5$	3^3	$3^2 \times 5$
$k-n$	1	3	3^2	5	5^2	3×5

この表より、 k 、 n の組合せを求めると、以下の表のようになる。

k	338	114	42	70	26	30
n	337	111	33	65	1	15

よって、①を満たすような n は 6 個あり、

最大の n は 337、このときの k は 338 である。

〔Ⅱ〕 (1) 余弦定理より,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 120^\circ = 61$$

よって, $c = \sqrt{61}$

(2) 余弦定理より,

$$\cos \beta = \frac{6^2 + 2^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 2} = -\frac{3}{8}$$

よって,

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

ここで, $\triangle ABC$ の面積は, $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{3\sqrt{55}}{4}$

内接円の半径を r とすると, $\frac{1}{2} r (2 + 7 + 6) = \frac{3\sqrt{55}}{4}$ より, $r = \frac{\sqrt{55}}{10}$
よって求める内接円の面積は,

$$\pi \left(\frac{\sqrt{55}}{10} \right)^2 = \frac{11}{20} \pi$$

(3) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$ より, $\alpha = 30^\circ$

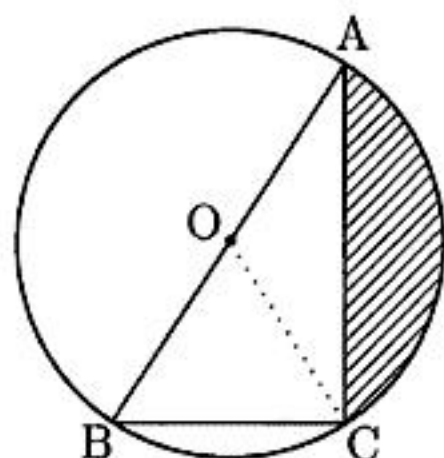
よって, $\triangle ABC$ は右図のような直角三角形となり,
面積を求める領域は, 斜線部分である.

ここで, 外心を O , 外接円の半径の長さを R とすると,
正弦定理より,

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \text{よって, } R = 6$$

ここで, $\beta = 60^\circ$ であるから, $\angle AOC = 120^\circ$
よって, 求める面積 S は,

$$S = \text{扇形 } AOC - \triangle AOC = \pi R^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ = 12\pi - 9\sqrt{3}$$



[Ⅲ]

$$(1) \quad a_1 = S_1 = \frac{1}{12} (2 + 9 + 7 + 6) = 2$$

$$a_1 + a_2 = S_2 = \frac{1}{12} (16 + 36 + 14 + 6) = 6$$

$$\text{より, } a_2 = 4$$

(2) $n \geq 2$ のとき,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{1}{12} \{ 2(n^3 - (n-1)^3) + 9(n^2 - (n-1)^2) + 7(n - (n-1)) \}$$

$$= \frac{1}{12} (6n^2 + 12n)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+2)$$

$$a_n = 420 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2} n(n+2) = 420$$

$$\iff n^2 + 2n - 840 = 0$$

$$\iff (n+30)(n-28) = 0$$

$$\text{よって, } n > 0 \text{ より, } n = 28$$

$$(3) \quad Q_n = 1 + \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k(k+2)}$$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{7n^2 + 15n + 5}{3n^2 + 9n + 6}$$

$$[\text{IV}] \quad 2^x + 2^y = 4^x + 4^y = (2^x)^2 + (2^y)^2 \text{ より,}$$

$$X + Y = X^2 + Y^2 \quad \dots\dots (2)$$

$X + Y = t$ とおくと, $X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY$ であるから,
(2) より $X + Y = (X + Y)^2 - 2XY$

$$XY = \frac{1}{2}(t^2 - t)$$

よって, X, Y を実数解にもつ Z に関する 2 次方程式は,

$$Z^2 - tZ + \frac{1}{2}(t^2 - t) = 0$$

この方程式の判別式 D は

$$D = (-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}(t^2 - t) = -t^2 + 2t \geq 0$$

$$\iff t(t - 2) \leq 0$$

$$\iff 0 \leq t \leq 2 \quad \dots\dots (4)$$

また,

$$X + Y = t > 0, \quad XY = \frac{1}{2}(t^2 - t) = \frac{1}{2}t(t - 1) > 0 \quad \dots\dots (5)$$

より, (5) が成立するのは, $t > 1 \quad \dots\dots (6)$

よって, (4) と (6) を同時に満たす t の値の範囲は

$$1 < t \leq 2 \quad \dots\dots (7)$$

となる.

次に, $8^x + 8^y$ を t の式で表すと

$$\begin{aligned} 8^x + 8^y &= (2^x)^3 + (2^y)^3 \\ &= X^3 + Y^3 \\ &= (X + Y)^3 - 3XY(X + Y) \\ &= t^3 - 3t \cdot \frac{1}{2}(t^2 - t) \\ &= \frac{1}{2}(-t^3 + 3t^2) \quad \dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(-t^3 + 3t^2) \text{ とおくと, } f'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 6t) = -\frac{3}{2}t(t - 2)$$

$1 < t \leq 2$ で増減表を書くと, 下のようになる.

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$		↗

よって, $f(t)$ は $t = 2$ で最大値 2 をとり, また $f(1) = 1$ だから, $f(t)$ のとり得る値の範囲は

$$1 < f(t) \leq 2 \quad \text{すなわち, } 1 < 8^x + 8^y \leq 2$$

である.

[V] $f(x) = 2x^2 - 6ax + 5a$ より, $f'(x) = 4x - 6a$
 よって, l_A の方程式は, $y - (2a^2 - 6a^2 + 5a) = -2a(x - a)$ より

$$l_A : y = -2ax - 2a^2 + 5a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

同様に, l_B の方程式は, $y - (18a^2 - 18a^2 + 5a) = 6a(x - 3a)$ より

$$l_B : y = 6ax - 18a^2 + 5a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(1) l_A と l_B および y 軸で囲まれた部分は右の斜線部. 底辺の長さを l_A と l_B それぞれの y 切片の差, 高さを l_A , l_B の交点の x 座標として面積を求めればよい.

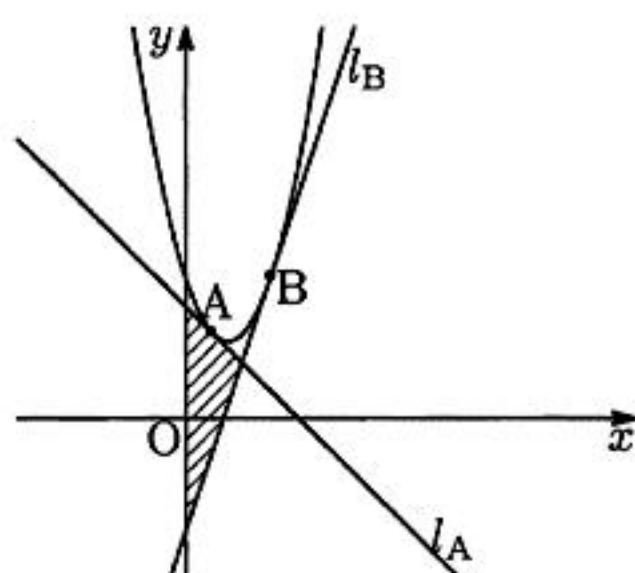
l_A , l_B の交点の x 座標は, ①, ②より

$$-2ax - 2a^2 + 5a = 6ax - 18a^2 + 5a$$

すなわち, 交点の x 座標は $x = 2a$

よって, 求める面積は

$$\frac{1}{2} \{-2a^2 + 5a - (-18a^2 + 5a)\} \cdot 2a = 16a^3$$



(2) 曲線 $y = f(x)$ と l_A および l_B で囲まれた図形の面積 S は, 右上のグラフより

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{2a} \{2x^2 - 6ax + 5a - (-2ax - 2a^2 + 5a)\} dx \\ &\quad + \int_{2a}^{3a} \{2x^2 - 6ax + 5a - (6ax - 18a^2 + 5a)\} dx \\ &= \int_a^{2a} (2x^2 - 4ax + 2a^2) dx + \int_{2a}^{3a} (2x^2 - 12ax + 18a^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 + 2a^2x \right]_a^{2a} + \left[\frac{2}{3}x^3 - 6ax^2 + 18a^2x \right]_{2a}^{3a} \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

(3) l_A が原点を通るとき, $a = d$ であるから,

$$\begin{aligned} -2d^2 + 5d &= 0 \\ \iff -d(2d - 5) &= 0 \end{aligned}$$

よって, $d > 0$ であるから, $d = \frac{5}{2}$

(4) l_A と x 軸, y 軸の交点の座標は $\left(-a + \frac{5}{2}, 0\right)$, $(0, -2a^2 + 5a)$
 よって

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-a + \frac{5}{2}\right) (-2a^2 + 5a) \\ &= \frac{1}{4} a(-2a + 5)^2 \\ &= a^3 - 5a^2 + \frac{25}{4}a \\ S'(a) &= 3a^2 - 10a + \frac{25}{4} \\ &= \frac{1}{4} (12a^2 - 40a + 25) \\ &= \frac{1}{4} (2a - 5)(6a - 5) \end{aligned}$$

$0 < a < \frac{5}{2}$ で増減表を書くと, 以下のようになる.

a	0		$\frac{5}{6}$		$\frac{5}{2}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, $S(a)$ は $a = \frac{5}{6}$ のとき, 最大値をとり,

$$S\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{125}{54}$$

[VI]

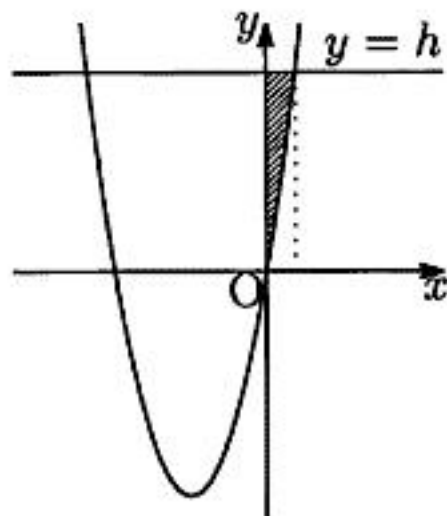
(1) $x^2 + 6x - y = 0$ を x について解くと,

$$x = -3 \pm \sqrt{9 + y}$$

$x \geq 0$ のとき, $x = -3 + \sqrt{9 + h}$

よって, 回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi x^2 dy \\ &= \pi \int_0^h \left(y + 9 - 6\sqrt{y + 9} + 9 \right) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 - 4(y + 9)^{\frac{3}{2}} + 18y \right]_0^h \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ h^2 + 36h - 8(h + 9)^{\frac{3}{2}} + 216 \right\} \end{aligned}$$



(2) $h = 16$, $h = 7$ のときの回転体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とすると, (1) より

$$V_1 = \frac{\pi}{2} (16^2 + 36 \cdot 16 - 8 \cdot 25^{\frac{3}{2}} + 216) = 24\pi$$

$$V_2 = \frac{\pi}{2} (7^2 + 36 \cdot 7 - 8 \cdot 16^{\frac{3}{2}} + 216) = \frac{5}{2}\pi$$

よって

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{24\pi}{\frac{5}{2}\pi} = \frac{48}{5}$$

すなわち, $h = 16$ のときの回転体の体積は, $h = 7$ のときの体積の $\frac{48}{5}$ 倍となる.