

[1]

ABが直径なので  $\triangle ABC$  は  $\angle ACB = 90^\circ$  の直角三角形.

AB=10, BC=6 より AC=8,

AE:EC=3:1 より AE=6, EC=2 である.

$\triangle BCE$  も直角三角形で BC=6, EC=2 より  $BE=2\sqrt{10}$

また,  $\triangle BCE \sim \triangle ADE$  より AE:BE=DE:CE

$$\therefore DE = \frac{AE \times CE}{BE} = \frac{6 \times 2}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

よって

$$\frac{BE}{DE} = \frac{2\sqrt{10}}{\frac{3}{5}\sqrt{10}} = \boxed{\frac{10}{3}} \quad \dots\dots\text{アイウ}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABE &= \frac{1}{2} \times AE \times BC \quad (\because \angle ACB = 90^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = \boxed{18} \quad \dots\dots\dots\text{エオ} \end{aligned}$$

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

$\triangle BCE$  と  $\triangle CDE$  は BE, DE をそれぞれ底辺として考えると高さが共通なので

$$\triangle BCE : \triangle CDE = BE : DE$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle CDE &= \frac{DE}{BE} \times \triangle BCE \\ &= \frac{3}{10} \times 6 = \boxed{\frac{9}{5}} \quad \dots\dots\dots\text{カキ} \end{aligned}$$

〔Ⅱ〕

(1)  $a_n$  の階差数列  $c_n$  を考えると

$$c_1 = 0.0037, c_2 = 0.0000037, \dots$$

となっているので  $c_n = 0.0037 \times (10^{-3})^{n-1}$

したがって  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 3.7 + \frac{3.7}{10^3} \left\{ \frac{1 - (10^{-3})^{n-1}}{1 - 10^{-3}} \right\} \\ &= 3.7 \left( 1 + \frac{1 - 10^{-3n+3}}{999} \right) \\ &= \frac{37}{10} \times \frac{1000 - 10^{-3n+3}}{999} = \frac{100 - 10^{-3n+2}}{27} \end{aligned}$$

これは  $n=1$  のときも成り立つ.

$$\therefore a_n = \frac{10^{\boxed{2}}}{\boxed{27}} - \frac{10^{\boxed{-3n+2}}}{\boxed{27}} \quad \dots\dots \text{アイ, ウエ, オ—②, カ—⑨}$$

(2)  $b_1 = a_1 \times \frac{1}{10}, b_2 = a_2 \times \frac{1}{10^2}$  より

$$b_n = a_n \times 10^{\boxed{-n}} \quad \dots\dots \text{キ—①}$$

$$= \frac{10^{\boxed{-n+2}}}{27} - \frac{10^{\boxed{-4n+2}}}{27} \quad \dots\dots \text{ク—③, ケ—⑨}$$

である.

〔Ⅲ〕

(1) OABC は正四面体で、一辺の長さは  $OA=1$  であるから

$$OB^2=1 \text{ より } a^2+b^2=1 \quad \cdots (i)$$

$$AB^2=1 \text{ より } a^2+(b-1)^2=1 \quad \cdots (ii)$$

$$(i), (ii) \text{ より } a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{ア—②, イ—③}$$

$$\text{また, } OC^2=1 \text{ より } c^2+d^2+e^2=1 \quad \cdots (iii)$$

$$AC^2=1 \text{ より } c^2+(d-1)^2+e^2=1 \quad \cdots (iv)$$

$$BC^2=1 \text{ より } \left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)^2+e^2=1 \quad \cdots (v)$$

$$(iii), (iv) \text{ より } d=\frac{1}{2}$$

$$(iii) \text{ または } (iv) \text{ に } d=\frac{1}{2} \text{ を代入し, (v) と連立して解くと } c=\frac{\sqrt{3}}{6}, e=\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \cdots \cdots \text{ウ—⑨, エ—⑩, オ—⑦}$$

$$(2) \vec{OP}=\frac{\vec{OA}+2\vec{OB}}{3} \text{ より } P\left(\frac{0+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \frac{1\times1+2\times\frac{1}{2}}{3}, 0\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \quad \cdots \cdots \text{カ—⑥, キ—④}$$

$$\text{また, } \vec{OP} \cdot \vec{OC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{ク—⑩}$$

$$\text{このとき } |\vec{OP}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}, |\vec{OC}|=1 \text{ より}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OP}||\vec{OC}|} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14} \quad \cdots \cdots \text{ケコサシ}$$

[IV]

$$D : (x-10)^2 + \{y-(t-10)\}^2 \leq 5^2$$

- (1) 点  $(6, 0)$  が  $D$  にあるとき, 不等式  $(6-10)^2 + \{0-(t-10)\}^2 \leq 5^2$  を満たす.  
整理すると

$$t^2 - 20t + 91 \leq 0$$

$$(t-7)(t-13) \leq 0$$

$$\therefore \boxed{7} \leq t \leq \boxed{13}$$

……ア, イウ

- (2)  $P(10, t-10), Q(2t, 0)$  より

$$PQ^2 = (10-2t)^2 + (t-10-0)^2$$

$$= 5t^2 - 60t + 200$$

$$= 5(t-6)^2 + 20$$

したがって,  $PQ$  は  $t = \boxed{6}$  のとき最小値  $\sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$  をとる. ……エ, オカ

- (3)  $P(10, t-10), S(vt, 0)$  より

$$PS^2 = (10-vt)^2 + (t-10-0)^2$$

$$= (v^2+1)t^2 - 20(v+1)t + 200$$

$$= (v^2+1) \left\{ t - \frac{10(v+1)}{v^2+1} \right\}^2 + 200 - \frac{100(v+1)^2}{v^2+1}$$

$$= (v^2+1) \left\{ t - \frac{10(v+1)}{v^2+1} \right\}^2 + \frac{100(v-1)^2}{v^2+1}$$

$S$  が領域  $D$  にあるような  $t$  が存在するためには,  $PS$  の最小値が円の半径 5 以下であれば良いから

$$\sqrt{\frac{100(v-1)^2}{v^2+1}} \leq 5$$

両辺とも正なので 2 乗してから整理すると

$$3v^2 - 8v + 3 \leq 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{4-\sqrt{7}}{3}} \leq v \leq \boxed{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$$

……キー②, クー③

$v < \frac{4-\sqrt{7}}{3}$  のとき  $S$  は領域  $D$  内に無いため  $PS > 5$  であるから

$v \leq \frac{4-\sqrt{7}}{3}$  の範囲で  $PS$  が最小になるのは  $t = \frac{10(v+1)}{v^2+1}, v = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$  のときである. (このとき  $PS = 5$ )

これより  $t = \boxed{\frac{5(7+\sqrt{7})}{4}}, vt = \boxed{\frac{5(7-\sqrt{7})}{4}}$  となる. ……ケー⑦, コー⑥

〔V〕

$$\begin{aligned}f(x) &= 8x^3 + 12x^2 - 18x + 5 \\&= (2x-1)^2(2x+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 24x^2 + 24x - 18 \\&= 6(2x-1)(2x+3)\end{aligned}$$

より,  $y=f(x)$  は  $x=\boxed{\frac{-3}{2}}$  のとき極大値  $\boxed{32}$  をとり, …アイウ,エオ

$x=\boxed{\frac{1}{2}}$  のとき極小値  $\boxed{0}$  をとる. ……カキ,ク

また,  $f(x)>0$  が成り立つのは  $\boxed{\frac{-5}{2}}<x<\boxed{\frac{1}{2}}$ , または  $x>\boxed{\frac{1}{2}}$  のときである.

……ケコサ,シス,セソ

[VI]

$y=4x$  と  $y=2\sin\pi x$  は [3] 個の共有点をもち, それらのうちで  $x$  座標が最も大きいのは  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  である. (他の共有点は  $(0, 0), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ )

.....ア, イウ, エ

これより

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}} |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sin\pi x - 4x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (4x - 2\sin\pi x) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{\pi} \cos\pi x - 2x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[ 2x^2 + \frac{2}{\pi} \cos\pi x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{9}\end{aligned}$$

.....オ, カキ

また,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^1 (4\sin^2\pi x - 16x\sin\pi x + 16x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 2\cos 2\pi x + 16x^2 - 16x\sin\pi x) dx \\ &= 2 \left[ 2x - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x + \frac{16}{3} x^3 \right]_0^1 - 32 \int_0^1 x \sin\pi x dx \\ &= \frac{44}{3} - 32 \left\{ \left[ x \left( -\frac{\cos\pi x}{\pi} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos\pi x}{\pi} dx \right\} \\ &= \frac{44}{3} - 32 \left( \frac{1}{\pi} + \left[ \frac{\sin\pi x}{\pi^2} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{44}{3} - \frac{32}{\pi}\end{aligned}$$

.....クケコ, サシ