

[1]

ここでは、サイコロの目と引いた札の数を $4-(4, 3, 3, 1)$ のように書くことにする。
(最初の数字がサイコロの目で後ろの括弧内の数字が引いた札に書かれた数)

(1) 数の合計が2となるのは

・1-(2) のとき、つまりサイコロの目が1で、2の札を1枚引くとき

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_1}{{}_8C_1} = \frac{1}{24}$$

・2-(1, 1) のとき、つまりサイコロの目が2で、1の札を2枚引くとき

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{168}$$

この2つの場合のみである。これらは排反なので、求める確率は

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{168} = \frac{1}{21}$$

(2) 数の合計が4となるのは

$$\text{・1-(4) のとき} \quad \dots\dots \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_1}{{}_8C_1} = \frac{1}{6 \times 4}$$

$$\text{・2-(3, 1) のとき} \quad \dots\dots \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_2} = \frac{1}{6 \times 7}$$

$$\text{・2-(2, 2) のとき} \quad \dots\dots \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{6 \times 4 \times 7}$$

$$\text{・3-(2, 1, 1) のとき} \quad \dots\dots \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_2}{{}_8C_3} = \frac{1}{6 \times 4 \times 7}$$

の場合で、これらは排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 7} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{6 \times 4 \times 7} = \frac{7+1+4+1}{6 \times 4 \times 7} = \frac{13}{168}$$

〔Ⅱ〕

(1) 辺の長さに関する三角形の成立条件は

$$|CA - BC| < AB < BC + CA$$

である.

$$(|AB - BC| < CA < BC + AB$$

$$|CA - AB| < BC < AB + CA$$

でも同じ結果になる.)

$\triangle ABC$ の周の長さが 10 であるから

この条件式に $AB = 4, BC = a, CA = 10 - (4 + a) = 6 - a$

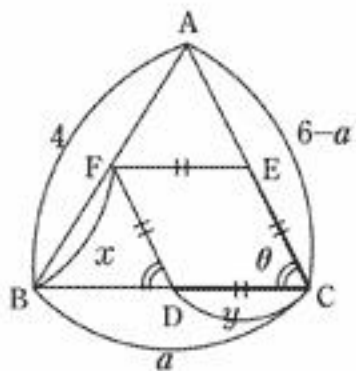
を代入して

$$|(6 - a) - a| < 4 < a + (6 - a)$$

右側の不等式は $4 < 6$ となり常に成り立つから,

$$|6 - 2a| < 4$$

これを解いて $1 < a < 5$ が求める a の範囲である.



(2) 題意より, 四角形 CEFD はひし形であるから平行四辺形でもあるので

$FD \parallel EC$ より $\angle ACB = \angle FDB$ が成り立ち

$\triangle ABC \sim \triangle FDB$ ($\angle B$ は共通, $\angle ACB = \angle FDB$ より二角相等)

である.

$FB = x, DC = y$ とおけば $AB : BC : CA = FB : BD : DF$ より

$$4 : a : (6 - a) = x : (a - y) : y$$

$$4(a - y) = ax$$

$$4y = (6 - a)x$$

より $x = \frac{2}{3}a, y = \frac{(6 - a)a}{6}$ となる. よって $FB = \frac{2}{3}a$

(1) $f(x)=x^2+ax+b$ とおく. 方程式 $f(x)=0$ が 1 より小さい正の実数解と 1 より大きく 2 より小さい実数解を持つ条件は,

$y=f(x)$ のグラフが下に凸の放物線であることを考慮すれば

$$\bullet f(0)>0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\bullet f(1)<0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\bullet f(2)>0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\bullet y=f(x) \text{ の軸が } 0<x<2 \text{ の範囲にある} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\bullet f(x)=0 \text{ の判別式 } D>0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる.

$$\textcircled{1} \text{ より } b>0$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 1+a+b<0$$

$$\textcircled{3} \text{ より } 4+2a+b>0$$

$$\textcircled{4} \text{ より, } y=f(x) \text{ の軸は } x=-\frac{a}{2} \text{ であるから, } 0<-\frac{a}{2}<2 \quad \therefore -4<a<0$$

$$\textcircled{5} \text{ より } D=(-a)^2-4b>0 \quad \therefore b<\frac{1}{4}a^2$$

であるが, 実際は $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$, $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{5}$ が成り立つので $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ は冗長である. よって, 求める a, b の条件は

$$\begin{cases} b < -a-1 \\ b > -2a-4 \\ b > 0 \end{cases}$$

であり, これを表す領域は下図の斜線部 (ただし, 境界線は含まない)

