

〔1〕

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a=10-2b \text{ より } a^2+b^2 &= (10-2b)^2+b^2 = 5b^2-40b+100 \\
 &= 5(b^2-8b)+100 \\
 &= 5(b-4)^2+20
 \end{aligned}$$

a, b は実数より $(b-4)^2 \geq 0$ であるから $5(b-4)^2+20 \geq 20$

よって $a^2+b^2 \geq 20$

(2) $a+2b=k$ とおく。このとき a, b は実数であるので k も実数である。

$$a=k-2b \text{ より } a^2+b^2=(k-2b)^2+b^2=5b^2-4kb+k^2$$

$$a^2+b^2=3 \text{ より } 5b^2-4kb+k^2=3 \quad \therefore 5b^2-4kb+k^2-3=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この2次方程式を満たす実数 b が存在しなければいけないから、

①の判別式を D とおくと $D \geq 0$ が成り立つ。

ここで

$$D/4 = (2k)^2 - 5(k^2-3) = -k^2+15 \geq 0$$

$$\therefore k^2 \leq 15$$

k は実数であるから $-\sqrt{15} \leq k \leq \sqrt{15}$

よって $-\sqrt{15} \leq a+2b \leq \sqrt{15}$

$$(3) \quad a^2+b^2-4a-4b=-7 \text{ より } (a-2)^2+(b-2)^2=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

a^2+b^2 のとりうる値の範囲は、円②と原点 O を中心とする円: $a^2+b^2=r^2$ が交点を持つときの r^2 のとりうる値の範囲に等しい。

②の中心を A とすると $OA=2\sqrt{2}$

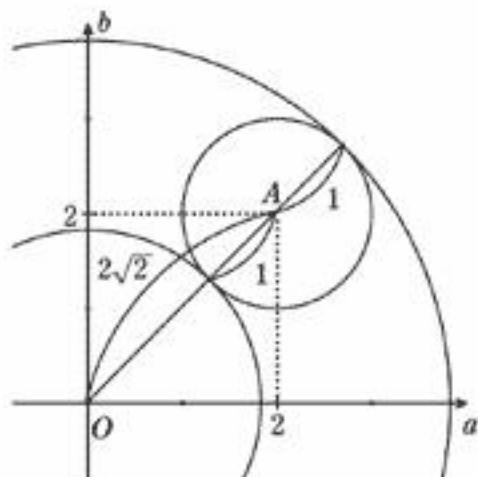
②の半径は1だから

$$2\sqrt{2}-1 \leq r \leq 2\sqrt{2}+1$$

$$\therefore 9-4\sqrt{2} \leq r^2 \leq 9+4\sqrt{2}$$

よって

$$9-4\sqrt{2} \leq a^2+b^2 \leq 9+4\sqrt{2}$$



〔Ⅱ〕

(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\&= (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ = 2 \quad \therefore BC = \sqrt{2} \quad (\because BC > 0) \\CD^2 &= AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \angle CAD \\&= 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 1 \quad \therefore CD = 1 \quad (\because CD > 0)\end{aligned}$$

△BCD について

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD \\&= (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \angle BCD = 3 - 2\sqrt{2} \cos \angle BCD\end{aligned}$$

△BAD について

$$\begin{aligned}BD^2 &= BA^2 + AD^2 - 2 \cdot BA \cdot AD \cdot \cos \angle BAD \\&= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \angle BAD = 5 - 2\sqrt{6} \cos \angle BAD \\&= 5 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cos \angle BCD\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}3 - 2\sqrt{2} \cos \angle BCD &= 5 - 6\sqrt{2} \cos \angle BCD \\ \therefore \cos \angle BCD &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ BD^2 &= 2 \quad \therefore BD = \sqrt{2} \quad (\because BD > 0)\end{aligned}$$

(2) $\sin \angle BCD > 0, \sin \angle BAD > 0$ であり, (1) より $\sin \angle BCD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},$

$\cos \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ より $\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ であるから

四面体 ABCD の表面積は

$$\begin{aligned}&\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ABD + \triangle BCD \\&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\&= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \\&= \frac{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$