

[1]

n 回試行を繰り返したあとの濃度を x_n % とおく.

n 回の試行のうち, 濃度を 2 倍にした回数が l 回だったとすると

$$x_n = 2^l k^{n-l} x_0 = 2^l k^{n-l} \quad (\%)$$

また, この濃度になる確率は ${}_nC_l \times p^l (1-p)^{n-l}$ である.

(1) $p = \frac{1}{3}, k = 0.5, n = 5$ のとき $x_5 = 2$ となるような l の値を求めると

$$2 = 2^l \left(\frac{1}{2}\right)^{5-l} = 2^{2l-5}$$

$$2^6 = 2^{2l} \quad \text{より } l = 3$$

よって濃度が 2 % となる確率は ${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-3} = \frac{40}{243}$

(2) なり得る濃度は $\frac{1}{32}$ ($l=0$), $\frac{1}{8}$ ($l=1$), $\frac{1}{2}$ ($l=2$), 2 ($l=3$), 8 ($l=4$), 32 ($l=5$)

(単位は全て%) であるので, 濃度の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_{l=0}^5 \left\{ 2^l \left(\frac{1}{2}\right)^{5-l} \times {}_5C_l \left(\frac{1}{3}\right)^l \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-l} \right\} \\ &= \frac{1}{32} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{1}{8} \times {}_5C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{2} \times {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \\ &\quad + 8 \times {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 + 32 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ &= \frac{1}{3^5} (1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32) = \frac{243}{243} = 1 \end{aligned}$$

よって, 濃度の期待値は 1 %

(3) $k = 0.25, n = 2$ のときの濃度の期待値 E' は

$$\begin{aligned} E' &= 2^0 \left(\frac{1}{4}\right)^2 {}_2C_0 p^0 (1-p)^2 + 2^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 {}_2C_1 p^1 (1-p)^1 + 2^2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 {}_2C_2 p^2 (1-p)^0 \\ &= \frac{(1-p)^2}{16} + p(1-p) + 4p^2 = \frac{49}{16} p^2 + \frac{7}{8} p + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$E' = 1 \quad \text{より} \quad \frac{49}{16} p^2 + \frac{7}{8} p + \frac{1}{16} = 1$$

整理すると $49p^2 + 14p - 15 = 0$

$$(7p+5)(7p-3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{3}{7} \quad (\because 0 \leq p \leq 1)$$

$$(1) \quad 3\log_8(x-1) + \log_8(x+1) - 1 = -\log_8(x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{真数条件より } x-1 > 0, \quad x+1 > 0, \quad x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \therefore x > 1$$

このとき,

$$\log_8(x-1)^3 + \log_8(x+1) + \log_8(x+1)^2 = 1$$

$$\log_8\{(x-1)^3(x+1)^3\} = \log_8 8$$

$$\therefore \{(x-1)^3(x+1)^3\} = 8 = 2^3$$

$$x \text{ は実数だから } (x-1)(x+1) = 2 \text{ より } x^2 = 3 \quad \therefore x = \sqrt{3} \quad (\because x > 1)$$

$$(2) \quad (\log_2 x)^2 - \log_{0.25} x^4 - 8 < 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, \quad x^4 > 0 \quad \therefore x > 0$$

$$\log_{0.25} x^4 = \frac{\log_2 x^4}{\log_2 0.25} = \frac{4\log_2 x}{\log_2 2^{-2}} = -2\log_2 x \text{ より } \log_2 x = X \text{ とおくと与式は}$$

$$X^2 + 2X - 8 < 0$$

$$(X+4)(X-2) < 0 \text{ より } -4 < X < 2 \quad \therefore -4 < \log_2 x < 2$$

底 $= 2 > 1$ より

$$2^{-4} < x < 2^2, \quad \therefore \frac{1}{16} < x < 4 \quad (\text{これは } x > 0 \text{ を満たしている})$$

$$(3) \quad x = 3^{\log_9(2-x)}$$

$$\text{真数条件および指数の性質より } 2-x > 0, \quad x > 0 \quad \therefore 0 < x < 2$$

与式の両辺の、底を 3 とする対数を考えると

$$\log_3 x = \log_3 3^{\log_9(2-x)}$$

$$= \log_9(2-x) = \frac{\log_3(2-x)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(2-x)}{2}$$

$$\log_3 x^2 = \log_3(2-x) \text{ より}$$

$$x^2 = 2-x \quad \text{整理して } x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1 \quad (\because 0 < x < 2)$$

- (1) A, B は放物線上の点ではないから, 3 点 A, B, P が一直線に並ぶとき P は直線 AB と放物線との交点である. 直線 AB: $y = 2x - 3$ より

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9 \text{ と } y = 2x - 3 \text{ を連立して}$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9 = 2x - 3$$

$$\text{整理すると } x^2 = 36 \quad \therefore x = \pm 6$$

よって, 求める P の座標は $(6, 9)$ または $(-6, -15)$

- (2) P (X, Y) とおく. A, B, P が一直線に並ぶときは三角形にならないから
(1) の結果より $X \neq \pm 6$

点 P は放物線上の点だから $Y = -\frac{1}{3}X^2 + 2X + 9$ である.

$\triangle ABP$ の重心を (x, y) とすると

$$\begin{cases} x = \frac{1+2+X}{3} = \frac{X+3}{3} & \dots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1+1+Y}{3} = -\frac{1}{9}X^2 + \frac{2}{3}X + 3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より $X = 3x - 3$ を ② に代入して

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{9}(3x-3)^2 + \frac{2}{3}(3x-3) + 3 \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

ここで, $X = 6$ のとき $x = \frac{6+3}{3} = 3, y = -9 + 12 = 3$

$X = -6$ のとき $x = \frac{-6+3}{3} = -1, y = -1 - 4 = -5$

であるから, 求める軌跡は $y = -x^2 + 4x$ ただし, 2 点 $(3, 3), (-1, -5)$ を除く.

- (3) 領域 D は

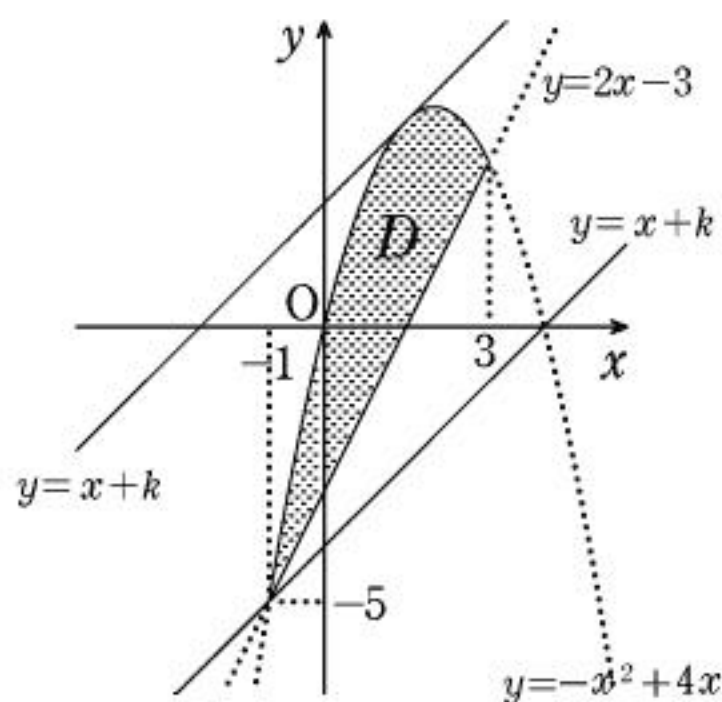
$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 4x \\ y \geq 2x - 3 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

で表され, 右図のようになるから

$y = x + k$ が D と共有点を持ち,

かつ k が最大となるのは

$y = x + k$ が $y = -x^2 + 4x$ に接するときである.



方程式 $x + k = -x^2 + 4x$ が重解を持つとき

$(x^2 - 3x + k = 0 \text{ の判別式}) = 0$ より $9 - 4k = 0$

よって k の最大値は $\frac{9}{4}$ である.