

〔I〕

(1)

$P = \frac{1}{4}$ のとき、各ライトについて、点灯している確率は $\frac{1}{4}$ であるから、6 個のうち半分、つまり 3 個のライトが点灯している確率は、

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{135}{1024}$$

となる。

(答) $\frac{135}{1024}$

(2)

各ライトについて、3 分後に点灯していないような状態変化とその生起確率は下表のようになる。表において、点灯している状態を○、点灯していない状態を×で表す。

1 分後	2 分後	3 分後	生起確率
○	○	×	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$
○	×	×	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$
×	○	×	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$
×	×	×	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

したがって、各ライトについて、3 分後に点灯していない確率は $\frac{3+3+3+27}{64} = \frac{9}{16}$ となる。求

める確率は、両端の 2 つとも点灯していない場合の余事象の確率であるから、

$$1 - \left(\frac{9}{16} \right)^2 = \frac{171}{256}$$

となる。

(答) $\frac{171}{256}$

(3)

$P = \frac{1}{2}$ のとき、8 分後の状態がどちらであっても、点灯している状態と点灯していない状態とが、 $\frac{1}{2}$ の確率で起きるから、(1)と同様に考えて、

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。

(答) $\frac{5}{16}$

〔経済学部Ⅱ〕

(1)

年利率 r 、年 m 回複利で預けたとき、ある時に α 円持っていたとすると、 $\frac{1}{m}$ 年経過すると、 $\frac{r}{m}\alpha$ の利息が付き、元利合計は $\left(1 + \frac{r}{m}\right)\alpha$ 円となる。 n 年後では、これが mn 回繰り返されることになるから、元金 1 円預けたときの n 年後の元利合計は、

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

円となる。

$$(\text{答}) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

(2)

(1)の答に $m=2, n=15$ を代入すると $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{30}$ 円であり、求める r の範囲は $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{30} > 1000$ となるような範囲である。

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{30} > 1000$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{30} > \log_{10} 1000$$

$$\Leftrightarrow 30 \log_{10} \left(1 + \frac{r}{2}\right) > 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(1 + \frac{r}{2}\right) > 0.1$$

であり、 $0.1 = \log_{10} 1.26$ としているから、

$$\log_{10} \left(1 + \frac{r}{2}\right) > \log_{10} 1.26$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{2} > 1.26$$

$$\Leftrightarrow r > 0.52$$

である。

$$(\text{答}) r > 0.52$$

(3)

(1)の答に $r=1, n=12$ を代入すると $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{12m}$ 円であり、求める m の範囲は

$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{12m} > 10000$ となるような範囲である。

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{12m} > 10000$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{12m} > \log_{10} 10000$$

$$\Leftrightarrow 12m \log_{10} \left(1 + \frac{1}{m}\right) > 4$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(1 + \frac{1}{m}\right) > \frac{1}{3m}$$

であり、 $\log_{10}(1+x) > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 0 < x < 0.67$ としているから

$$\log_{10} \left(1 + \frac{1}{m}\right) > \frac{1}{3m}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{m} < 0.67$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{67} < m$$

となる。 m は自然数であるから、求める m の値の範囲は $m \geq 2$ である。

$$(\text{答}) m \geq 2$$

$$\begin{cases} f'(x) = \int_0^1 xf(t)dt - a \\ f(0) = a+1 \end{cases}$$

(a は定数)

$\int_0^1 f(t)dt = A$ (A は定数) とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 xf(t)dt - a \\ &= x \int_0^1 f(t)dt - a \\ &= Ax - a \end{aligned}$$

となり, $f(x) = \frac{A}{2}x^2 - ax + C$ (C は積分定数) となる。 $f(0) = a+1 = C$ となるから,

$f(x) = \frac{A}{2}x^2 - ax + a+1$ である。以上より

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{A}{2}t^2 - at + a+1 \right) dt \\ &= \left[\frac{A}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + (a+1)t \right]_0^1 \\ &= \frac{A}{6} + \frac{a}{2} + 1 \\ \Leftrightarrow A &= \frac{3}{5}a + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{5}a + \frac{6}{5}$$

(2)

(1)より $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}a + \frac{6}{5} \right) x^2 - ax + a+1$ である。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(t)dt &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}a + \frac{6}{5} \right) t^2 - at + a+1 \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{6} \left(\frac{3}{5}a + \frac{6}{5} \right) t^3 - \frac{a}{2}t^2 + (a+1)t \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{3}{5}a + \frac{6}{5} \right) + \frac{a}{2} + (a+1) \\ &= \frac{8}{5}a + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

であり, $\int_{-1}^0 f(t)dt = 6$ であるので, 以上より

$$\begin{aligned} \frac{8}{5}a + \frac{6}{5} &= 6 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

であり

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4, \quad a = 3$$

〔社会学部Ⅱ〕 および〔現代福祉学部Ⅱ〕

(1)

点 $(-1, -6)$ が放物線 $y = x^2 - 2x + a$ 上の点であるから、

$$-6 = 1 + 2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = -9$$

である。

(答) $a = -9$

(2)

$p = 4$ のとき、 $P(4, -1)$ であり、

$$l: y = x - 5 \quad (x \geq -1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。円 C の方程式を

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r > 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

とすれば、半直線 l と円 C の交点の x 座標は、2 つの方程式から、 y を消去した、

$$x^2 + (x - 5)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 25 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{25}{2}$$

の解である。半直線 l と円 C が接するとき、この 2 次方程式は重解を持つから、

$$r^2 - \frac{25}{2} = 0 \therefore r = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

となり、平方完成の形から、重解は $x = \frac{5}{2}$ となる。このとき、接点は $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ となり、

$\frac{5}{2} > -1$ より、確かに半直線 l 上の点であるから、これが求めるものである。

(答) 円 C の半径: $\frac{5}{\sqrt{2}}$, 接点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

(3)

$q = p^2 - 2p - 9$ であるから、半直線 l の傾きは

$$\frac{q+6}{p+1} = \frac{(p-3)(p+1)}{p+1} = (p-3)$$

であり、半直線 l の式は、

$$y = (p-3)(x+1) - 6 = (p-3)x + p - 9 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。(2)と同様に、半直線 l と円 C の交点は、②と③から y を消去して得られる 2 次方程式

$$x^2 + \{(p-3)x + p - 9\}^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \{1 + (p-3)^2\}x^2 + 2(p-3)(p-9)x + (p-9)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \{1 + (p-3)^2\} \left\{ x + \frac{(p-3)(p-9)}{1 + (p-3)^2} \right\}^2 = r^2 - \frac{(p-9)^2}{1 + (p-3)^2}$$

の解である。これが重解を持つことから、

$$r^2 - \frac{(p-9)^2}{1 + (p-3)^2} = 0$$

$$\therefore r = \frac{|p-9|}{\sqrt{1 + (p-3)^2}}$$

となる。ここで、②式が円を定めるためには $r > 0$ でなければならないから、

$$p \neq 9 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。また、この時の接点の x 座標 $x = -\frac{(p-3)(p-9)}{1 + (p-3)^2}$ が -1 以上であることから、

$$-\frac{(p-3)(p-9)}{1 + (p-3)^2} \geq -1 \Leftrightarrow (p-3)(p-9) \leq 1 + (p-3)^2$$

$$\therefore p \geq \frac{17}{6} \quad \dots \textcircled{5}$$

でなければならない。以上、④と⑤より、円 C が存在するための p の条件は、

$$p \geq \frac{17}{6} \quad \text{かつ} \quad p \neq 9$$

となる。

(答) $p \geq \frac{17}{6}$ かつ $p \neq 9$

〔社会学部Ⅲ〕 および 〔現代福祉学部Ⅲ〕

(1)

条件をまとめると

$$BC = 2AB \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle ABC = 120^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ \quad \dots \textcircled{3}$$

である。正弦定理より、

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow AC = 3$$

である。余弦定理より、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow 9 = 7AB^2 \quad (\because \textcircled{1}\textcircled{2})$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

であり、①より $BC = \frac{6}{\sqrt{7}}$ である。以上より

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{14}$$

である。円周角の定理より

$$\angle CBD = \angle CAD = 60^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$$

であるから、 $\triangle ACD$ は正三角形であり、 $AC = CD = DA = 3$ となり

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

となる。以上より四角形 ABCD の面積は

$$\frac{9\sqrt{3}}{14} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{28}$$

となる。

(答) AC の長さ:3, 四角形 ABCD の面積: $\frac{81\sqrt{3}}{28}$

(2)

B, D から AC に下した垂線の足をそれぞれ H, I とすれば、底辺を AC とみて、面積を比較することにより、

$$BH : DI = \triangle ABC : \triangle ACD$$

$$= 2 : 7$$

となる。一方、BH//DI より、

$$\triangle BEH \sim \triangle DEI$$

であるから、

$$BE : ED = BH : DI = 2 : 7$$

と求まる。

(答) BE:ED=2:7

(3)

AC=3 と AE:EC=1:2 より、AE=1 である。また、余弦定理より

$$ED^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos \angle EAD$$

$$= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos 60^\circ$$

$$= 7$$

$$\Leftrightarrow ED = \sqrt{7}$$

である。

(答) AE=1

$$ED = \sqrt{7}$$