

[1]

3つの数字が決まれば整数は決定されるので、可能な数字の個数は1～6の6つの数字の中から重複を許して3つ数字を選ぶ選び方に等しい。

数字が重複する数で分けて考えると、

1つも重複しない場合

6つの数字から3種類の数字を選ぶから ${}_6C_3 = 20$ 個

1つ重複する場合

6つの数字から2種類の数字を選び、どちらの数字が重複するかでそれぞれ2通りずつあるから ${}_6C_2 \times 2 = 30$ 個

2つ重複する場合

3つの数字が全部同じだから、数字の選び方の数と同じ6個

したがって合計 **56** 個ある。…………アイ

その中で一の位が2となるものは、112, 122, 222 の合わせて **3** 個ある。…………ウ

また、一の位が4となると、十の位と百の位の数字は4以下であり4つの数字の中から重複を許して2つ選ぶ選び方の数だけ数字があるから、その個数は

数字が重複しない選び方 ${}_4C_2 = 6$ 個

数字が重複する選び方 4 個

の合わせて10個ある。

同様にして、一の位が6となる数字の個数は ${}_6C_2 + 6 = 21$ 個あるから、偶数は全部で

$3 + 10 + 21 = \mathbf{34}$ 個ある。…………エオ

各桁の数の合計が9の倍数になるような数字の組み合わせは

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3), (6, 6, 6)

の **7** 個である。…………カ

〔Ⅱ〕

4 次方程式 $x^4 - 6x^3 - x^2 + 18x + 9 = 0$ は $x = 0$ を解として持たないので
両辺を x^2 で割って

$$x^2 - 6x - 1 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) + 5 = 0$$

よって $y = x - \frac{3}{x}$ で置き換えれば

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

を得る. したがって $a = \boxed{-3}, b = \boxed{-6}, c = \boxed{5}$ である. ……アイ, ウエ, オ

また, この 2 次方程式を解くと $(y-1)(y-5) = 0$ より $y = 1, 5$ であるから

$$\alpha = \boxed{1}, \beta = \boxed{5} \quad \text{……カ, キ}$$

となる.

したがって

$$x - \frac{3}{x} = 1 \quad \text{より} \quad x^2 - x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x - \frac{3}{x} = 5 \quad \text{より} \quad x^2 - 5x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

となるが, $3 < \sqrt{13} < 4, 6 < \sqrt{37} < 7$ より

$$-3 < (1 - \sqrt{13}) < -2 < (5 - \sqrt{37}) < -1, \quad 4 < (1 + \sqrt{13}) < 5 < (5 + \sqrt{37})$$

であるから

$$p = \boxed{\frac{1 - \sqrt{13}}{2}} \quad q = \boxed{\frac{5 - \sqrt{37}}{2}} \quad r = \boxed{\frac{1 + \sqrt{13}}{2}} \quad s = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$$

……ク～テ

となる.

〔Ⅲ〕

$$(1) \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{整理して } \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 3y + 2z = 10 \\ x + 3z = 8 \end{cases}$$

これを解くと $x = \boxed{-1}, y = \boxed{1}, z = \boxed{3}$ となる.

…アー⑥, イー①, ウー③

$$(2) \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos 2\beta & 2\sin^2 \beta & 0 \\ \cos^2 \beta & 0 & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos 2\beta & 2\sin^2 \beta & 0 \\ \cos^2 \beta & 0 & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos 2\beta & 2\sin^2 \beta & 0 \\ \cos^2 \beta & 0 & \sin^2 \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos 2\beta (1 + 2\sin^2 \beta) & 4\sin^4 \beta & 0 \\ \cos^2 \beta (1 + \sin^2 \beta) & 0 & \sin^4 \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1 - 2\sin^2 \beta)(1 + 2\sin^2 \beta) & 4\sin^4 \beta & 0 \\ (1 - \sin^2 \beta)(1 + \sin^2 \beta) & 0 & \sin^4 \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - 4\sin^4 \beta & 4\sin^4 \beta & 0 \\ 1 - \sin^4 \beta & 0 & \sin^4 \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4\sin^4 \beta & 4\sin^4 \beta & 0 \\ -\sin^4 \beta & 0 & \sin^4 \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \boxed{\sin^4 \beta} \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{-4} & \boxed{4} & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

……エ, オ, カ

……キー④, クー⑦, ケー⑦, コー⑦

サー⑨, シー④, スー⑦

セー⑥, ソー⑦, ター①

[IV]

$y = f_1(x) = -x^3 + a^2$ と $y = f_2(x) = x^2 - a^2x$ の交点は

$$-x^3 + a^2 = x^2 - a^2x \quad \text{より} \quad x^3 + x^2 - a^2x - a^2 = 0$$

$$(x+1)(x+a)(x-a) = 0 \quad \therefore x = -1, \pm a$$

(1) $a > 1$ のとき $-a < -1 < a$ であるから

$$x_1 = \boxed{-a}, \quad x_2 = \boxed{-1}, \quad x_3 = \boxed{a} \quad \dots \text{ア-②, イ-⑥, ウ-⑦}$$

となり, $-a < x < -1$ の区間では C_2 が C_1 の上方にあるから

$$S_1 = \int_{-a}^{-1} \{(x^2 - a^2x) - (-x^3 + a^2)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_{-a}^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{12}$$

$$\text{よって } p = \boxed{\frac{1}{4}}, \quad q = \boxed{-\frac{2}{3}}, \quad r = \boxed{\frac{1}{2}}, \quad s = \boxed{-\frac{1}{12}} \quad \dots \text{エ-⑥, オ-③, カ-⑨, キ-⑩}$$

(2) $0 < a < 1$ のとき $-1 < -a < a$ であるから $x_1 = \boxed{-1}, \quad x_3 = \boxed{a}$ である.

$\dots \text{ク-⑩, ケ-⑦}$

このとき

$$S_1 = \int_{-1}^{-a} \{f_2(x) - f_1(x)\} dx,$$

$$S_2 = \int_{-a}^a \{f_1(x) - f_2(x)\} dx$$

であり, $S_1 = S_2$ より

$$S_1 - S_2 = \int_{-1}^{-a} \{f_2(x) - f_1(x)\} dx - \int_{-a}^a \{f_1(x) - f_2(x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^{-a} \{f_2(x) - f_1(x)\} dx + \int_{-a}^a \{f_2(x) - f_1(x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^a \{f_2(x) - f_1(x)\} dx = \boxed{0} \quad \dots \text{コ}$$

が成り立つ.

$$\int_{-1}^a \{f_2(x) - f_1(x)\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_{-1}^a$$

$$= -\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12}$$

より, $-\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12} = 0$ の解のひとつが $a = -1$ であることを利用して
因数分解すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12} &= -\frac{1}{12}(a+1)^3(3a-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $0 < a < 1$ より $a = \boxed{\frac{1}{3}}$ となる.

$\dots \text{サ-⑦}$

[V]

(1) $25 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ となるから $a_{25} = \boxed{4}$ である. ...ア

また,

$$15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

$$16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$$31 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

より $a_n = 4$ が成り立つのは, $\boxed{16} \leq n \leq \boxed{31}$ のときである.イウ, エオ

$$(2) \quad \underbrace{2^p \rightarrow 2^{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1}_{\rightarrow \text{が } p \text{ 個}}$$

$$\underbrace{2^p - 1 \rightarrow \frac{(2^p - 1) - 1}{2} = 2^{p-1} - 1 \rightarrow \cdots \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1}_{\rightarrow \text{が } p-1 \text{ 個}}$$

となるので, $a_n = p$ を満たす最小の n は $\boxed{2^p}$ である. ...カ-④

また, $a_n = p$ を満たす最大の n は $2^{p+1} - 1$ であるから, $a_n = p$ を満たす n の個数は

$$\begin{aligned} \alpha_p &= (2^{p+1} - 1) - 2^p + 1 = 2^{p+1} - 2^p \\ &= 2^p (2 - 1) = \boxed{2^p} \end{aligned} \quad \text{...キ-④}$$

(3) $n = 2^{25} + 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \underbrace{a_1}_{p=0} + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{p=1} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{p=2} + \cdots + \underbrace{(a_{2^{24}} + \cdots + a_{2^{25}-1})}_{p=24} + \underbrace{a_{2^{25}} + a_{2^{25}+1}}_{p=25} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{24} p \alpha_p \right) + 25 + 25 = \left(\sum_{p=1}^{24} p \alpha_p \right) + \boxed{50} \end{aligned} \quad \text{...クケ, コサ}$$

ここで, $S(m) = \sum_{p=1}^m p \alpha_p = \sum_{p=1}^m p 2^p$ とおくと

$$S(m) = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + m \cdot 2^m$$

$$2S(m) = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (m-1) \cdot 2^m + m \cdot 2^{m+1}$$

より

$$-S(m) = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^m) - m 2^{m+1}$$

$$= \frac{2(2^m - 1)}{2 - 1} - m 2^{m+1} = (1 - m) 2^{m+1} - 2$$

$$\therefore S(m) = (m-1) 2^{m+1} + 2$$

であるから

$$\sum_{k=1}^n a_k = \left(\sum_{p=1}^{24} p \alpha_p \right) + 50 = S(24) + 50 = \boxed{23} \cdot 2^{25} + \boxed{52} \quad \text{...シス, セソ}$$

[VI]

先に a を θ で表すことを考える. 直線 m の方程式は $y = \tan \theta \cdot x$ である.

C_1 の中心は $(1, \tan \theta)$, 半径は $\tan \theta$, C_2 の中心は $(a, a \tan \theta)$, 半径は P_2 の y 座標に等しく $a \tan \theta$ である. C_1 と C_2 は外接することになるから

$$P_1 P_2 = (C_1 \text{ の半径}) + (C_2 \text{ の半径}) = \tan \theta + a \tan \theta$$

中心間の距離 $P_1 P_2 = \sqrt{(1-a)^2 + (\tan \theta - a \tan \theta)^2}$ より

$$\sqrt{(1-a)^2 + (\tan \theta - a \tan \theta)^2} = \tan \theta + a \tan \theta$$

$$\sqrt{(1-a)^2 (1 + \tan^2 \theta)} = (a+1) \tan \theta$$

ここで, $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$) および $a < 1$ より

$$\sqrt{(1-a)^2 (1 + \tan^2 \theta)} = \left| \frac{1-a}{\cos \theta} \right| = \frac{1-a}{\cos \theta}$$

よって

$$\frac{1-a}{\cos \theta} = (a+1) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \therefore a = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$(1) \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } a = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \boxed{3 - 2\sqrt{2}} \text{ となる.} \quad \cdots \text{ア, イ, ウ}$$

$$(2) \quad \text{前述の通り } a = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \text{ である.} \quad \cdots \text{エ-⑥, オ-⑦}$$

(3) C_2 の半径は $a \tan \theta$ であるから $S = (a \tan \theta)^2 \pi$ である.

ここで, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$ ($\because \cos \theta > 0$) と (2) より $x = \sin \theta$ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \right)^2 \pi \\ &= \frac{(1-x)^2 x^2}{(1+x)^2 (1-x^2)} \pi = \boxed{\frac{x^2 (1-x)}{(1+x)^3}} \pi \quad \cdots \text{カ-⑧, キ-④} \end{aligned}$$