

[1]

$$(1) 15 = 3 \times 5, 40 = 2^3 \times 5, 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \text{ より}$$

最大公約数が5, 最小公倍数が $2^3 \times 3 \times 5^2$ となるような n は

$$n = 2^x \times 3^y \times 5^2 \quad (x=0, 1, 2, 3, y=0, 1)$$

と書くことができる. よってこのような n は $4 \times 2 = \boxed{8}$ 個ある. ……ア

このとき, 最小の n は $2^0 \times 3^0 \times 5^2 = \boxed{25}$, 最大の n は $2^3 \times 3^1 \times 5^2 = \boxed{600}$ である.

…イウ, エオカ

(2) a, b の最大公約数を m とすると, a, b は互いに素な自然数 a', b' を用いてそれぞれ $a = ma', b = mb'$ と表せる.

このとき, $a < b$ より $a' < b'$ である. また, 最小公倍数は $ma'b'$ である.

$51 = m(1 + a'b') > m$, また
 m は自然数より, $m = 1, 3, 17$

i) $m = 1$ のとき

$a'b' = 50$ これを満たす a', b' は (ただし, a', b' は互いに素, $a' < b'$)
 $(a', b') = (1, 50), (2, 25)$
 よって,
 $(a, b) = (1, 50), (2, 25)$

ii) $m = 3$ のとき

$a'b' = 16$ これを満たす a', b' は (ただし, a', b' は互いに素, $a' < b'$)
 $(a', b') = (1, 16)$
 よって,
 $(a, b) = (3, 48)$

iii) $m = 17$ のとき

$a'b' = 2$ これを満たす a', b' は (ただし, a', b' は互いに素, $a' < b'$)
 $(a', b') = (1, 2)$
 よって,
 $(a, b) = (17, 34)$

したがって, 求める2つの自然数 a, b の組は全部で4組あり,
 最大の a の値は17である.

〔Ⅱ〕

(1) 点 P は曲線上の点だから, $b = 2a^2$

$$y' = 4x \text{ より } l: y - 2a^2 = 4a(x - a)$$

整理して $y = 4ax - 2a^2$ であるから, $C_1 = \boxed{4}$, $C_2 = \boxed{-2}$ である. …ア-④, イ-⑦

(2) $y = 4ax - 2a^2$ より $y = 0$ のとき $x = \frac{1}{2}a$, $x = 0$ のとき $y = -2a^2$ であるから

$$Q\left(\frac{1}{2}a, 0\right), R(0, -2a^2) \text{ となる.} \quad \dots \text{ウ-⑩, エ-⑦}$$

$$PQ = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}a\right)^2 + (2a^2 - 0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 16a^4}$$

$$PR = \sqrt{(a - 0)^2 + \{2a^2 - (-2a^2)\}^2} = \sqrt{a^2 + 16a^4}$$

$$\text{より } \frac{PR}{PQ} = \boxed{2} \text{ である.} \quad \dots \text{オ-②}$$

(3) $y = x^2 + 2x - 5$ と $y = 4ax - 2a^2$ を連立して整理すると

$$x^2 - (4a - 2)x + 2a^2 - 5 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (2a - 1)^2 - (2a^2 - 5) \\ &= 2(a - 1)^2 + 4 > 0 \end{aligned}$$

となり, l と曲線は必ず異なる 2 点で交わる. $S(\alpha, 4a\alpha - 2a^2), T(\beta, 4a\beta - 2a^2)$
 $(\alpha \neq \beta)$ とおくと, 解と係数の関係より $\alpha + \beta = 4a - 2$ が成り立ち,

$$PS^2 = (\alpha - a)^2 + (4a\alpha - 2a^2 - 2a^2)^2 = (1 + 16a^2)(\alpha - a)^2$$

$$PT^2 = (\beta - a)^2 + (4a\beta - 2a^2 - 2a^2)^2 = (1 + 16a^2)(\beta - a)^2$$

$PS = PT$ より $PS^2 = PT^2$ であるから

$$(1 + 16a^2)(\alpha - a)^2 = (1 + 16a^2)(\beta - a)^2$$

$$\therefore (1 + 16a^2)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2a) = 0$$

よって $1 + 16a^2 \neq 0, \alpha - \beta \neq 0$ より $\alpha + \beta - 2a = 0$ すなわち $(4a - 2) - 2a = 0$

$$\therefore a = \boxed{1} \quad \dots \text{カ-①}$$

このとき方程式は $x^2 - 2x - 3 = 0$ より $x = -1, 3$ であるから

$$PS = PT = \boxed{2\sqrt{17}} \quad \dots \text{キ-⑧}$$

となる.

〔Ⅲ〕

(1) a, b, c, d 各々 3 通りずつあるから、行列 A は $3^4 = \boxed{81}$ 個存在する. ……アイ

(2) 行列 A が逆行列を持たないのは $ad - bc = \boxed{0}$ のときであり, ……ウ

$ad = -1$ のとき $(a, d) = (1, -1), (-1, 1)$ のそれぞれについて
 $bc = -1$ となる場合が 2 通りずつあるから、計 $\boxed{4}$ 個 ……エ

$ad = 0$ のとき $ad = 0$ となるのは $(a, d) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)$
 の 5 通りあり、その各々に対して $bc = 0$ となる b, c
 の組み合わせが 5 通りあるから、 $5 \times 5 = \boxed{25}$ 個 ……オカ

$ad = 1$ のとき $(a, d) = (1, 1), (-1, -1)$ のそれぞれについて
 $bc = 1$ となる場合が 2 通りずつある。よって $\boxed{4}$ 個 ……キ

したがって $m = 4 + 25 + 4 = \boxed{33}$ となる. ……クケ

(3) ケーリー・ハミルトンの公式より、行列 A は

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O \quad (\text{ただし、} E \text{ は単位行列、} O \text{ は零行列を表す})$$

を満たす。 $A^2 = A$ が成り立つとき

$$A - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

$$\therefore (a + d - 1)A = (ad - bc)E$$

(i) $a + d - 1 \neq 0$ のとき

A は実数 k を用いて $A = kE$ と表され、 $A^2 = A$ より $(k^2 - k)E = O$

$$k(k - 1) = 0 \text{ より } k = 0, 1 \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって行列 A の数は 2 個

(ii) $a + d - 1 = 0$ のとき

$ad - bc = 0$ であるから、(2) と同じように ad の値で場合分けして考える。

$ad = -1$ のとき $a + d = 1$ を満たす a, d の組は存在しないので 0 個

$ad = 0$ のとき $a + d = 1$ より $(a, d) = (0, 1), (1, 0)$ 。 $bc = 0$ となる b, c の
 組み合わせはそれぞれ 5 通りずつあるから、合わせて 10 個

$ad = 1$ のとき $a + d = 1$ を満たす a, d の組は存在しないので 0 個

よって (i) (ii) より合計 $\boxed{12}$ 個存在する. ……コサ

[IV]

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c \quad \text{より} \quad f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$$

$y = f(x)$ が $x = \alpha, \beta$ ($\alpha \neq \beta$) で極値を取るのは $f'(x) = 0$ が異なる 2 実数解をもつときだから、 $f'(x) = 0$ の判別式を D とおくと

$$D/4 = (3a)^2 - 9b = 9(a^2 - b) > 0$$

よって、 $\boxed{a^2 - b} > 0$ のとき極値をとる.ア-④

このとき、 α, β は方程式 $3x^2 + 6ax + 3b = 0$ の 2 解だから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \boxed{-2a}, \quad \alpha\beta = b \quad \text{.....イ-[-]}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2a)^2 - 2b = \boxed{4a^2 - 2b} \quad \text{.....ウ-⑤}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-2a)^3 - 3b(-2a) = \boxed{-8a^3 + 6ab} \quad \text{.....エ-⑦} \end{aligned}$$

である.

$P(\alpha, f(\alpha)), Q(\beta, f(\beta))$ より、線分 PQ の中点 $M(\gamma, \delta)$ は

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \boxed{-a} \quad \text{.....オ-⑩}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\alpha^3 + \beta^3) + 3a(\alpha^2 + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 2c \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (-8a^3 + 6ab) + 3a(4a^2 - 2b) + 3b(-2a) + 2c \} \\ &= \boxed{2a^3 - 3ab + c} \quad \text{.....カ-⑧} \end{aligned}$$

$A(x, f(x)), B(X, Y)$ より、線分 AB の中点は $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{f(x)+Y}{2} \right)$ で表され、

この点が M であるとき、

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{x+X}{2}, \quad \delta = \frac{f(x)+Y}{2} \quad \text{より} \\ X &= -x + 2\gamma \quad \therefore U = 2\gamma = \boxed{-2a} \quad \text{.....キ-[-]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= -f(x) + 2\delta = -x^3 - 3ax^2 - 3bx - c + 2(2a^3 - 3ab + c) \\ \therefore V &= -c + 2(2a^3 - 3ab + c) = \boxed{4a^3 - 6ab + c} \quad \text{.....ク-⑥} \end{aligned}$$

である.

[V]

円 C_n の半径を r_n , C_n に内接する正三角形 $P_nQ_nR_n$ の一辺の長さを a_n , 面積を S_n とおく. 正弦定理より

$$\frac{a_n}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2r_n, \quad \therefore S_n = \frac{1}{2} a_n^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} r_n)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} r_n^2$$

次に, 円 C_{n+1} は正三角形 $P_nQ_nR_n$ の内接円だから, 内接円の半径と三角形の面積の関係から

$$\frac{1}{2} r_{n+1} (3a_n) = S_n \quad \therefore r_{n+1} = \frac{2}{3\sqrt{3}r_n} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} r_n^2 = \frac{1}{2} r_n$$

$$r_1 = 1 \text{ より } r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad a_n = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad S_n = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ である.}$$

また, 点 P_n は円 C_n 上に存在し, OP_1 から $(n-1) \times \frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である.

$P_1(0, 1) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$ より, 点 P_n の座標は

$$\left(r_n \cos \left\{\frac{\pi}{2} + (n-1)\frac{\pi}{3}\right\}, r_n \sin \left\{\frac{\pi}{2} + (n-1)\frac{\pi}{3}\right\}\right)$$

となる.

$$(1) \quad S_1 = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}, \quad r_2 = \boxed{\frac{1}{2}} \text{ である.} \quad \dots\dots\text{アイウ, エオ}$$

$$(2) \quad r_3 = \frac{1}{4} \text{ より, 円 } C_3 \text{ の面積は } \pi r_3^2 = \boxed{\frac{1}{16}}\pi \text{ であり,} \quad \dots\dots\text{カキク}$$

$$P_3 \left(\frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi \right), \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi \right) \right) = \left(\boxed{\frac{-\sqrt{3}}{8}}, \boxed{\frac{-1}{8}} \right) \text{ である.} \quad \dots\dots\text{ケ～セ}$$

[VI]

(1) $f(x)=1-x^2$ より $f(f(x))=1-(f(x))^2=1-(1-x^2)^2=-x^4+2x^2$
 よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(f(x))dx &= \int_0^1 (-x^4+2x^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^2\right]_0^1 = \boxed{\frac{7}{15}} \quad \dots\dots\text{アイウ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos xdx \\ &= \left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots\text{エオ}\end{aligned}$$

(3) $f(\sqrt{x})=1-x$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x)(\sin x)dx &= \left[(1-x)(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x)'(-\cos x)dx \\ &= \left[(1-x)(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx \\ &= 1-1=0 \quad \dots\dots\text{カ- ㊸}\end{aligned}$$

(4) $y=1-x^2$ とおくと $x^2=1-y$ ($y\leq 1$) $\therefore x=\sqrt{1-y}$ ($\therefore x\geq 0$)

よって $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{-1}(\sin^2 x)\cos xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{4}} \quad \dots\dots\text{キ-㊸, ク-㊹}\end{aligned}$$