

[1]

$$(1) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 10$$

$$(2) 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = (x+1)(2x-1)(x^2+2x+2) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}, -1$$

(3) $25! = 10^6 \times (\text{5を因数に含まない数})$ より, 一の位から6個連続で0があらわれる.

(4) $x^2 + px + p^2 + p - 1 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = p^2 - 4(p^2 + p - 1) = -(p+2)(3p-2) > 0 \quad \therefore -2 < p < \frac{2}{3}$$

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = p^2 + p - 1 \quad \text{より}$$

$$t = (\alpha + 1)(\beta + 1) = (p^2 + p - 1) - p + 1 = p^2$$

$$-2 < p < \frac{2}{3} \quad \text{より} \quad 0 \leq p^2 < 4 \quad \therefore 0 \leq t < 4$$

(5) 条件を満たす接線は $y = 1$ と $y = \sqrt{3}x - 2$

$$(6) \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + 60^\circ) \leq 1 \quad \text{より} \quad \sin(\theta + 60^\circ) \leq \frac{1}{2}$$

$60^\circ \leq \theta + 60^\circ \leq 420^\circ$ に注意すると

$$150^\circ \leq \theta + 60^\circ \leq 390^\circ \quad \therefore 90^\circ \leq \theta \leq 330^\circ$$

$$(7) \left(\frac{2}{3}\right)^m < 1.5 \times 10^{-5} \quad \text{より} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} < 10^{-5}$$

$$\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} < \log_{10} 10^{-5} \quad \text{より}$$

$$(m+1)(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -5$$

$$-0.1761(m+1) < -5 \quad (m+1) > 28.39 \cdots \quad \therefore m > 27.39 \cdots$$

よって m は 28 以上の整数

〔Ⅱ〕

〔A〕

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{より} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(x)\{f'(x) - 2x + 1\} = 4f(x) + 6(x+1) \quad \cdots (*)$$

(*)の左辺の最高次数は4, 4次の項の係数は $9a^2$ である. 一方, 右辺の最高次数は3だから, すべての実数 x について(*)が成り立つためには $9a^2 = 0 \quad \therefore a = 0$ である必要がある.

このとき, $f(x) = bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 2bx + c$ である.

(*)はすべての実数 x について成り立つから, 適当な x に対しても等式が成り立つ.

よって $x=0, x=\frac{1}{2}, x=-1$ を代入して

$$c(c+1) = 4d + 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(b+c)^2 = b + 2c + 4d + 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(-2b+c)(-2b+c+3) = 4b - 4c + 4d \quad \cdots \textcircled{3}$$

を得る.

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より} \quad b^2 + 2bc - b - 3c = 3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{ より} \quad 4b^2 - 4bc - 10b + 6c = -6 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \times 2 + \textcircled{5} \text{ より} \quad 6b^2 - 12b = 0 \quad \therefore b = 0, 2$$

$$b=0 \text{ のとき } c = -1, d = -\frac{3}{2}$$

$$b=2 \text{ のとき } c = 1, d = -1$$

$$\therefore (a, b, c, d) = \left(0, 0, -1, -\frac{3}{2}\right), (0, 2, 1, -1)$$

よって求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = -x - \frac{3}{2}, \quad f(x) = 2x^2 + x - 1$$