

[1]

(1) $\vec{v}_1 = \left(1, \frac{01}{03}\right)$ は l_1 と平行であり, $\vec{v}_2 = \left(1, \frac{-1}{02}\right)$ は l_2 と平行である. ...ア〜ク

このとき $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{05}{06}$ である. ...ケ〜シ

l_1 と l_2 のなす角は $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ のなす角と等しいから

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\theta = \frac{01}{04}\pi$...ス〜タ

(2) $2^x = X$ とおく. ($X > 0$)

$$2^x + 2^{-x} - a = 0 \text{ より } X + \frac{1}{X} - a = 0 \quad \therefore X^2 - aX + 1 = 0$$

$f(X) = X^2 - aX + 1$ とおくと, $f(X) = 0$ が $X > 0$ の範囲に実数解を持つ条件は

$$\begin{cases} f(X) = 0 \text{ の判別式 } D \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ Y = f(X) \text{ の軸 } > 0 \end{cases}$$

$D = a^2 - 4$ より $a \leq -2, 2 \leq a$ であり, $f(0) = 1$ より $f(0) > 0$ は常に成り立つ.

また, $Y = f(X)$ の軸 $X = \frac{a}{2} > 0$ より $a > 0$

であるから $a \geq 2 \left(= \frac{02}{01} \right)$...チ〜ト

(3) $\log_{0.25}(x-3) \geq 0.5$... (*) とする. 真数条件より $x-3 > 0$ である.

$$\log_{0.25}(x-3) = \frac{\log_2(x-3)}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2(x-3)}{-2} \text{ より}$$

$$(*) \iff -\frac{1}{2} \log_2(x-3) \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff \log_2(x-3) \leq -1 = \log_2 \frac{1}{2}$$

よって $x-3 \leq \frac{1}{2}$ より $x \leq \frac{7}{2}$

$x-3 > 0$ と合わせて, 求める x の範囲は $3 < x \leq \frac{7}{2} \left(\frac{03}{01} < x \leq \frac{07}{02} \right)$...ナ〜フ

〔Ⅱ〕

$$(1) f(x) = 4\sin x + \cos 2x - 1 = 4\sin x - 2\sin^2 x$$

$$\sin x \text{ の周期は } 2\pi \text{ であり, } f(x+2\pi) = 4\sin(x+2\pi) - 2\sin^2(x+2\pi) \\ = 4\sin x - 2\sin^2 x = f(x)$$

となるから $f(x)$ の周期は $2\pi \left(= \frac{\boxed{02}}{\boxed{01}}\pi \right)$ である. …ア～エ

$$(2) \sin x = t \text{ とおくと } f(x) = 4t - 2t^2 \quad (0 \leq x \leq 2\pi \text{ より } -1 \leq t \leq 1)$$

$$f(x) \leq 0 \text{ のとき } 4t - 2t^2 \leq 0 \text{ より } 2t(t-2) \geq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 0$$

よって $-1 \leq \sin x \leq 0$ となる x の範囲は

$$x = 0 \text{ または } \pi \leq x \leq 2\pi$$

である.

※ 解答欄 $\left(\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi \leq x \leq \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\pi \right)$ に合わない為, 正解無し

(3) $f(x)$ の最大値・最小値は $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t) = 4t - 2t^2$ の最大値・最小値と等しい.

$$g(t) = 4t - 2t^2 = -2(t-1)^2 + 2$$

より $g(t)$ は $t = -1$ のとき最小値 -6 , $t = 1$ のとき最大値 2 をとるから

$$f(x) \text{ は } \sin x = -1 \text{ つまり } x = \frac{\boxed{03}}{\boxed{02}}\pi \text{ のとき最小値 } -6 \left(= \frac{\boxed{-6}}{\boxed{01}} \right) \text{ をとり,}$$

$$\sin x = 1 \text{ つまり } x = \frac{\boxed{01}}{\boxed{02}}\pi \text{ のとき最大値 } 2 \left(= \frac{\boxed{02}}{\boxed{01}} \right) \text{ をとる. } \quad \dots \text{ス～フ}$$

$$(4) f'(x) = 4\cos x - 4\sin x \cos x = 4\cos x(1 - \sin x) \text{ より } f'(x) = 0 \text{ のとき } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{ のとき } f'(x) > 0$$

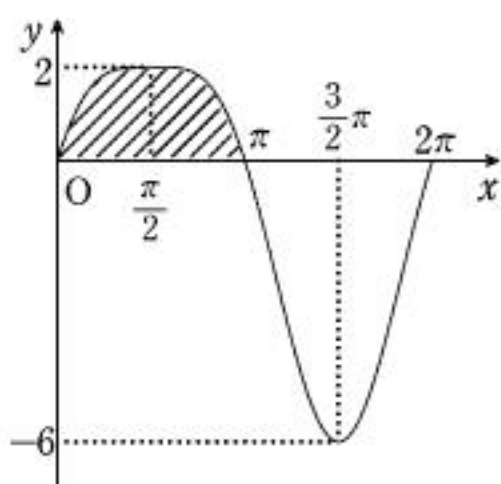
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ のとき } f'(x) < 0$$

であるから $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる.

このとき $y \leq f(x)$ かつ $y \geq 0$ の領域の面積は

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (4\sin x + \cos 2x - 1) dx$$

$$= \left[-4\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x - x \right]_0^{\pi} = 8 - \pi \left(= \frac{\boxed{08}}{\boxed{01}} + \frac{\boxed{-1}}{\boxed{01}}\pi \right) \quad \dots \text{へ～ヤ}$$



〔Ⅲ〕

- (1) $l: y=4a(x-1)$ より, 放物線 c の方程式を $y=bx^2$ とおき, 接点 P の x 座標を p とする.

$$\text{点 } P \text{ における } c \text{ の傾きは } y'=2bx \text{ より } 2bp=4a \quad \therefore b=\frac{2a}{p} \quad (\because a>0 \text{ より } p \neq 0)$$

$$\text{また, } bp^2=4a(p-1) \text{ より } 2ap=4ap-4a \quad \therefore p=2, b=a$$

$$\text{よって } P \text{ の座標は } (2, 4a) = \left(\boxed{\frac{00}{01}}a + \boxed{\frac{02}{01}}, \boxed{\frac{04}{01}}a + \boxed{\frac{00}{01}} \right) \quad \dots \text{ア} \sim \text{タ}$$

- (2) c の方程式は $y=ax^2$ となるから, 求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{ax^2 - 4a(x-1)\} dx \\ &= a \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{8}{3}a \left(= \boxed{\frac{08}{03}}a^{\boxed{1}} \right) \quad \dots \text{チ} \sim \text{ナ} \end{aligned}$$

- (3) l' は点 P を通り l に垂直な直線だから $y-4a = -\frac{1}{4a}(x-2)$ ($\because a>0$)

$$\therefore y = -\frac{1}{4a}x + 4a + \frac{1}{2a}$$

$$\text{よって } l' \text{ と } y \text{ 軸の交点 } Q \text{ の座標は } \left(0, 4a + \frac{1}{2a} \right)$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ のとき } 4a + \frac{1}{2a} = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6} \text{ だから } Q \left(0, \boxed{\frac{17}{06}} \right) \quad \dots \text{ニ} \sim \text{ノ}$$

$$(4) \text{ PQ}^2 = (0-2)^2 + \left\{ 4a - \left(4a + \frac{1}{2a} \right) \right\}^2 = 4 + \frac{1}{4a^2}$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{4} \text{ のとき } \text{PQ} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \left(= \boxed{02}\sqrt{\boxed{02}} \right) \quad \dots \text{ハ} \sim \text{ヘ}$$

- (5) l と y 軸の交点を R とすると, l, l' および y 軸によって囲まれる部分は三角形であり

$\triangle PQR$ の面積は P の x 座標が a にかかわらず一定であることを考えれば

底辺 QR の長さが最小のとき面積も最小となる.

$$R(0, -4a) \text{ より } QR = 4a + \frac{1}{2a} - (-4a) = 8a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{(8a)\left(\frac{1}{2a}\right)} = 4 \quad \left(\because 8a > 0, \frac{1}{2a} > 0 \right)$$

$$\text{等号成立は } 8a = \frac{1}{2a} \text{ すなわち } a = \frac{1}{4} \quad (\because a > 0) \text{ のとき}$$

$$\text{よって, 面積が最小になるのは } a = \boxed{\frac{01}{04}} \text{ のときである.} \quad \dots \text{ホ} \sim \text{ム}$$

[IV]

$$(1) f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx \text{ より } f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3b = 3(x^2 - 2ax + b)$$

$x = \alpha, \beta$ は $x^2 - 2ax + b = 0$ の 2 実数解であるから, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \boxed{2a}, \alpha\beta = \boxed{b} \quad \dots \text{ア-④, イ-⑤}$$

$$(2) f(x) = (x-a)(x^2 - 2ax + b) + (2b - 2a^2)x + ab \text{ より}$$

$$\text{商: } x - a \quad (= \boxed{1} \cdot x - \boxed{a}) \quad \dots \text{ウ-①, エ-③}$$

$$\text{剰余: } \boxed{2(b-a^2)}x + \boxed{ab} \quad \dots \text{オ-⑩, カ-⑦}$$

$$(3) f(\alpha) = 2(b-a^2)\alpha + ab$$

$$f(\beta) = 2(b-a^2)\beta + ab$$

より

$$f(\alpha) + f(\beta) = \boxed{2(b-a^2)}(\alpha + \beta) + \boxed{2ab} = 36 \quad \dots \text{キ-⑩, ク-⑧}$$

$$f(\alpha) - f(\beta) = \boxed{2(b-a^2)}(\alpha - \beta) + \boxed{0} = 4 \quad \dots \text{ケ-⑩, コ-⑨}$$

となる.

$$(4) (1) \text{ より } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4a^2 - 4b \text{ であるから}$$

$$2(b-a^2)(\alpha - \beta) = 4 \text{ の両辺を 2 乗して}$$

$$4(b-a^2)^2(\alpha - \beta)^2 = 16$$

$$(b-a^2)^2(4a^2-4b) = 4 \quad \therefore (b-a^2)^3 = -1$$

$$b-a^2 \text{ は実数であるから } b-a^2 = -1$$

(これは関数 $f(x)$ が極値をもつ, つまり $x^2 - 2ax + b = 0$ が異なる 2 実数解を持つ条件: (判別式) / 4 = $a^2 - b > 0$ を満たしている.)

$$\therefore b = a^2 - 1$$

$$\text{これを } 2(b-a^2)(\alpha + \beta) + 2ab = 36 \text{ に代入して}$$

$$-4a + 2a(a^2 - 1) = 36$$

$$a^3 - 3a - 18 = 0$$

$$(a-3)(a^2+3a+6) = 0$$

$$a^2 + 3a + 6 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ より } a = 3, b = 8 \quad (a = \boxed{03}, b = \boxed{08}) \quad \dots \text{サ} \sim \text{セ}$$

[V]

(1) n 人それぞれに対して 3 通りずつの手が考えられるから, 場合の数は $\boxed{3}^{\boxed{n}}$ 通り
...ア-③, イ-⑤

(2) r 人が勝つとき, $n-r$ 人は負けるということである. この場合の数は

勝者の選び方が ${}_nC_r$ 通り

勝つ側の出し手がグー, チョキ, パーの 3 通り

あり, 負ける側の出し手は勝つ側の手が決まれば自動的に決まるので

$$N(r) = 3 \times \boxed{{}_nC_r} \text{ (通り)} \quad \dots \text{ウ-④}$$

(3) だれか一人でも勝つ場合の数は

$$W = (1 \text{ 人が勝つ場合}) + (2 \text{ 人が勝つ場合}) + \dots + (n-1 \text{ 人が勝つ場合})$$

$$= \sum_{r=\boxed{1}}^{\boxed{n-1}} N(r) \quad \dots \text{エ-①, オ-④}$$

である.

(4) $(x+1)^n$ の二項展開の式

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k = {}_nC_0 x^0 + {}_nC_1 x^1 + {}_nC_2 x^2 + \dots + {}_nC_{n-1} x^{n-1} + {}_nC_n x^n$$

に $x=1$ を代入すると

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k = (1+1)^n = 2^{\boxed{n}} \quad \dots \text{カ-⑤}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} (5) \quad W &= \sum_{r=1}^{n-1} N(r) \\ &= 3 \times \sum_{r=1}^{n-1} {}_nC_r \\ &= 3 \{ 2^n - ({}_nC_0 + {}_nC_n) \} = 3(2^n - 2) \end{aligned}$$

であるから, あいこの場合は

$$(\text{全ての場合の数}) - (\text{だれか一人でも勝つ場合の数}) = 3^n - 3(2^n - 2)$$

よって, あいこになる確率は

$$\frac{3^n - 3(2^n - 2)}{3^n} = 1 - \frac{2^{\boxed{n}} - \boxed{2}}{3^{\boxed{n-1}}} \quad \dots \text{キ-⑤, ク-②, ケ-④}$$