

[1]

(1) $P(t, t^2 - 2t - 1), Q(-t, (-t)^2 + 3(-t) + 4)$ より

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{t - (-t)\}^2 + \{(t^2 - 2t - 1) - (t^2 - 3t + 4)\}^2} \\ &= \sqrt{(2t)^2 + (t - 5)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 10t + 25} \\ &= \sqrt{5(t-1)^2 + 20} \end{aligned}$$

$t \geq 0$ より PQ は $t=1$ のとき最小値 $\sqrt{20}$ をとる. $\dots$ (答)

(2) PQ を $3:2$ に内分する点の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X &= \frac{2t + 3(-t)}{3+2} = -\frac{1}{5}t \\ Y &= \frac{2(t^2 - 2t - 1) + 3(t^2 - 3t + 4)}{3+2} = \frac{1}{5}(5t^2 - 13t + 10) \\ &= t^2 - \frac{13}{5}t + 2 \end{aligned}$$

これらから t を消去して

$$\begin{aligned} Y &= (-5X)^2 - \frac{13}{5}(-5X) + 2 \\ &= 25X^2 + 13X + 2 \\ &= 25\left(X + \frac{13}{50}\right)^2 + \frac{31}{100} \end{aligned}$$

ただし, $t \geq 0$ より $X \leq 0$ である.

よって求める軌跡の方程式は

$$y = 25x^2 + 13x + 2 \quad (x \leq 0)$$

であり, 図示すると図1の実線部分.

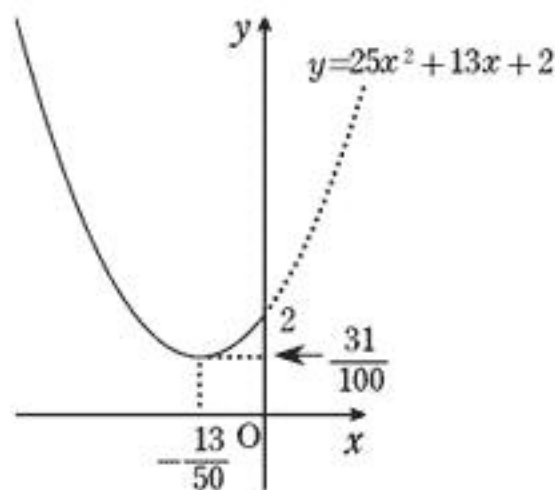


図1

〔Ⅱ〕

(1) 得点が 0 点になるのは、1～3 回目の全てで $X=Y$ となるとき、

2 つのさいころを同時に投げて 2 つの目が等しくなる確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

であるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) 得点が 4 点になるのは

(i) 1 回目で $|X-Y|=4$ となるとき

差が 4 となる目の出方は

$$(X, Y) = (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$$

の 4 通りであるから、その確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(ii) 1 回目で $X=Y$ となり、2 回目で $|X-Y|=2$ となるとき

1 回目で $X=Y$ となる確率は $\frac{1}{6}$ 、2 回目で差が 2 となる目の出方は

$$(X, Y) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), \\ (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)$$

の 8 通りであるから、その確率は $\frac{1}{6} \times \frac{8}{36} = \frac{1}{27}$

(iii) 1, 2 回目で $X=Y$ となり、3 回目で $|X-Y|=1$ となるとき

1, 2 回目で $X=Y$ となる確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ 、3 回目で差が 1 となる目の出方は

$$(X, Y) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) \\ (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

の 10 通りであるから、その確率は $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{10}{36} = \frac{5}{648}$

(i), (ii), (iii) は排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{5}{648} = \frac{101}{648} \quad \cdots (\text{答})$$

(3) 余事象で考える。

1 回目で $X \neq Y$ のときは得点が 5 点以下となることに注意すれば、得点が 10 点以上になるのは

(i) 1 回目で $X=Y$ となり、2 回目で $|X-Y|=5$ のとき

$|X-Y|=5$ となる目の出方は

$$(X, Y) = (1, 6), (6, 1)$$

の 2 通りだから、その確率は $\frac{1}{6} \times \frac{2}{36} = \frac{1}{108}$

(ii) 1, 2 回目で $X=Y$ となり、3 回目で $|X-Y| \geq 3$ のとき

$|X-Y| \geq 3$ となる目の出方は

$$(X, Y) = (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3), \\ (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2), \\ (1, 6), (6, 1)$$

の 12 通りだから、その確率は $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{12}{36} = \frac{1}{108}$

(i), (ii) は排反だから、得点が 10 点以上となる確率は

$$\frac{1}{108} + \frac{1}{108} = \frac{1}{54}$$

したがって、得点が 10 点未満となる確率は

$$1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54} \quad \cdots (\text{答})$$

〔Ⅲ〕

(*)の解の判別式を D とおく.

(1) (*)が実数解を持つ条件は $D \geq 0$ であり, $b=1$ のとき

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 3a \\ &= a(a-3) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0, 3 \leq a \end{aligned}$$

よって求める a の値の範囲は $a \leq 0, 3 \leq a \quad \cdots$ (答)

$$\begin{aligned} (2) \quad D &= \{a(b+1)\}^2 - 4a(b+2) \\ &= a^2b^2 + 2a(a-2)b + a^2 - 8a \quad \cdots \textcircled{1} \text{ とおく.} \end{aligned}$$

すべての実数 b に対して(*)が実数解をもつ, すなわち $D \geq 0$ が成り立つような a の条件を考える.

(i) $a=0$ のとき

$D=0$ となるから, すべての実数 b に対して(*)は実数解を持つ.

(ii) $a \neq 0$ のとき

①を b の2次関数と見れば

$$\begin{aligned} D &= a^2b^2 + 2a(a-2)b + a^2 - 8a \\ &= a^2 \left(b + \frac{a-2}{a} \right)^2 - 4a - 4 \end{aligned}$$

となり, $a \neq 0$ より $a^2 > 0$ であるから, これは下に凸の放物線であり, 最小値は $-4a-4$ である.

$$\begin{aligned} \text{「全ての実数 } b \text{ に対して } D \geq 0 \text{ が成り立つ」} &\iff D \text{ の最小値} \geq 0 \\ &\iff -4a-4 \geq 0 \\ &\iff a \leq -1 \end{aligned}$$

であるから, (*)が実数解を持つ a の条件は $a \leq -1$ となる.

(i), (ii)より, 求める a の値の範囲は

$$a=0 \text{ または } a \leq -1 \quad \cdots$$
(答)