

[1]

(1) 1～15の整数のうち、2の倍数は

2, $4(=2^2)$, $6(=2 \times 3)$, $8(=2^3)$, $10(=2 \times 5)$, $12(=2^2 \times 3)$, $14(=2 \times 7)$
の7つある。

これらを全て2で割ると、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7となり、7つのうち4つが素数となるから、これらから5つの数を選ぶと必ず素数が2つ以上含まれる。

したがって、1～7の7つの数からどの5つを選んでも共通因数は1のみとなる、すなわち、2～14の7つの偶数のうちどの5つを選んでも共通因数は2のみとなる。

よって、5つの数の最大公約数が2になるのは、取り出した5枚の札がこれら7種類のどれかであれば良い。求める確率は

$$\frac{{}_7C_5}{{}_{15}C_5} = \frac{1}{11 \times 13} = \frac{1}{143} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $72 = 2^3 \times 3^2$ より、最小公倍数が72となるためには5つの数が全て

$$2^p \times 3^q \quad (0 \leq p \leq 3, 0 \leq q \leq 2, p, q \text{ は整数}) \quad \dots (*)$$

の形で表せなければならない。また、 $15 < 72$ より1～15の中に $p=3$ と $q=2$ を同時に満たす数はないから、 $p=3$ となるものと $q=2$ となるものが少なくとも1つずつ含まれていなければならない。

1～15の整数の中で(*)の形で表せる数は、

$$1, 2, 3, 4(=2^2), 6(=2 \times 3), 8(=2^3), 9(=3^2), 12(=2^2 \times 3)$$

の8つあり、このうち $p=3$ を満たすのは8のみ、 $q=2$ を満たすのは9のみであるから、この2つの数と残りの6つの数から3つを選べば5つの数の最小公倍数は72となる。よって求める確率は

$$\frac{{}_8C_3}{{}_{15}C_5} = \frac{5 \times 4}{7 \times 13 \times 3 \times 11} = \frac{20}{3003} \quad \dots (\text{答})$$

〔Ⅱ〕

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2m(a-2)y + (m^2 + 1)a^2 - 4m^2a + 2(2m^2 - 1) \leq 0$$

$$\iff (x-a)^2 + \{y-m(a-2)\}^2 \leq 2$$

より、 D は中心 $(a, m(a-2))$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円の内部であるから
求める D の面積は

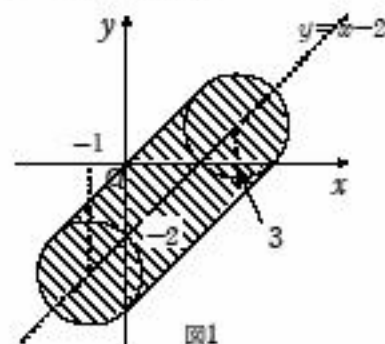
$$\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi \quad \dots(\text{答})$$

(2) $m=1$ のとき D は中心 $(a, a-2)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円の内部であり、
 $-1 \leq a \leq 3$ のときこの中心は $y=x-2$ ($-1 \leq x \leq 3$) 上を動く。

したがって、 D の通過する領域は図1の斜線部
(境界は含む) となり、この領域の面積は

$$4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 2\pi = 16 + 2\pi \quad \dots(\text{答})$$

である。



$$(3) \quad x^2 + y^2 - 6y + 7 \leq 0 \iff x^2 + (y-3)^2 \leq 2 \quad \text{より}$$

E の表す領域は中心 $(0, 3)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円の内部である。

a が実数全体を動くとき (1) より D の中心は $y=m(x-2)$ (x は実数全体)
上を動くから、 D の通過する領域は、点 $(2, 0)$ を通り傾き m の直線を中心と
した幅 $2\sqrt{2}$ の帯状領域となる。(図2)

D の通過領域と E が共有点をもつのは、点 $(0, 3)$ から直線 $mx - y - 2m = 0$
までの距離が $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 以内のときであるから、

$$\frac{|-3-2m|}{\sqrt{m^2+1}} \leq 2\sqrt{2}$$

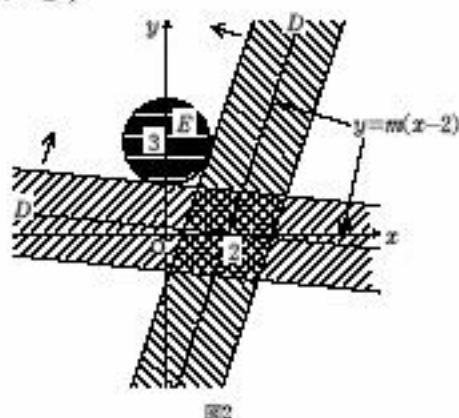
$$\therefore |-3-2m| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

$|-3-2m| \geq 0$ より両辺を2乗して

$$4m^2 + 12m + 9 \leq 8(m^2 + 1)$$

$$4m^2 - 12m - 1 \geq 0$$

$$\therefore m \leq \frac{3-\sqrt{10}}{2}, \frac{3+\sqrt{10}}{2} \leq m$$



$\dots(\text{答})$

〔法学部Ⅲ〕 および〔文学部Ⅲ〕

- (1) 球が面 $ABFE$, $BCGF$, $ACGE$ と接する点をそれぞれ P , Q , R とすると, 3 点 P , Q , R を通る平面 α は面 ABC および EFG に平行になるから, α と辺 AE , BF , CG との交点をそれぞれ I , J , K とおけば, 三角柱の α による断面 $\triangle IJK$ は $\triangle ABC$ ($\triangle EFG$) と合同であり, 球 S の半径は $\triangle IJK$ の内接円の半径と等しい. また, 球 S の半径を r とおけば, $AI = IE = r$ が成り立つ.

$$IJ = AB = 3, JK = BC = AD = 4, \angle IJK = \angle ABC = 90^\circ \text{ より}$$

$$KI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\frac{1}{2}r(IJ + JK + KI) = \frac{1}{2}IJ \cdot JK \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}r(3 + 4 + 5) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \quad \therefore r = 1$$

したがって, $AE = 2r = 2 \cdots$ (答) となる.

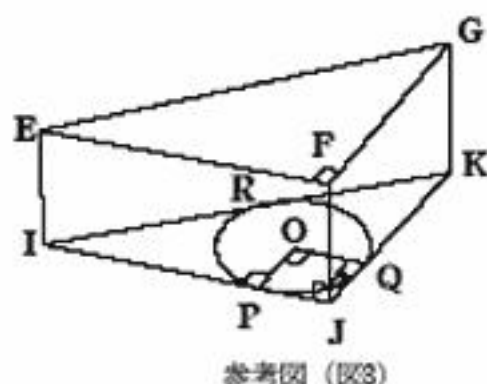
- (2) 球 S の中心を O とすれば (1) より

$$\angle OPJ = \angle OQJ = \angle PJQ = \angle PJF = \angle QJF = 90^\circ$$

$$OP = OQ = PJ = JF = 1$$

である. よって

$$\begin{aligned} OF &= \sqrt{OP^2 + PJ^2 + JF^2} \\ &= \sqrt{3} \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$



- (3) $ABFE$, $BCGF$, EFG と球 S に接する球の中心を T , 半径を t とおく.

O , T がそれぞれ $ABFE$, $BCGF$, EFG から等距離にあることから

T は線分 OF 上にあり, $TF = \sqrt{3}t$, $OT = r + t = 1 + t$ である.

よって $OF = OT + TF$ より

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}t + 1 + t$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} \quad \cdots \text{(答)}$$

〔経営学部Ⅲ〕

(準備)

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1 \text{ である.}$$

初項 1, 公比 3 の等比数列の一般項を b_n とおくと,

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$S_k = \sum_{j=1}^k b_j = \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^k - 1)$$

- (1) $\{a_n\}$ の第 S_k 項 a_{S_k} は

$$a_{S_k} = 3S_k - 1$$

$$= 3 \left\{ \frac{1}{2}(3^k - 1) \right\} - 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3^{k+1} - \frac{5}{2} \quad \cdots \text{(答)}$$

$$\left(= \frac{1}{2}(3^{k+1} - 5) \right)$$

- (2) $k \geq 2$ より

$$a_{S_{k-1}+1} = 3 \left\{ \frac{1}{2}(3^{k-1} - 1) + 1 \right\} - 1$$

$$= \frac{1}{2}(3^k + 1)$$

であり, 第 $S_{k-1} + 1$ 項から第 S_k 項までの項数は

$$S_k - (S_{k-1} + 1) + 1 = S_k - S_{k-1} = b_k = 3^{k-1}$$

となるから, 等差数列 $\{a_n\}$ の第 $S_{k-1} + 1$ 項から第 S_k 項までの和は

$$\frac{3^{k-1}(a_{S_{k-1}+1} + a_{S_k})}{2} = \frac{3^{k-1} \left\{ \frac{1}{2}(3^k + 1) + \frac{1}{2}(3^{k+1} - 5) \right\}}{2}$$

$$= \frac{3^{k-1}}{4}(3^k + 1 + 3 \cdot 3^k - 5)$$

$$= 3^{k-1}(3^k - 1)$$

$$= 3^{2k-1} - 3^{k-1} \quad \cdots \text{(答)}$$