

[I]

$$(1) |x-1|-1 = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -x & (x < 1) \end{cases} \text{であるから}$$

$$f(x) = ||x-1|-1| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (1 \leq x < 2) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

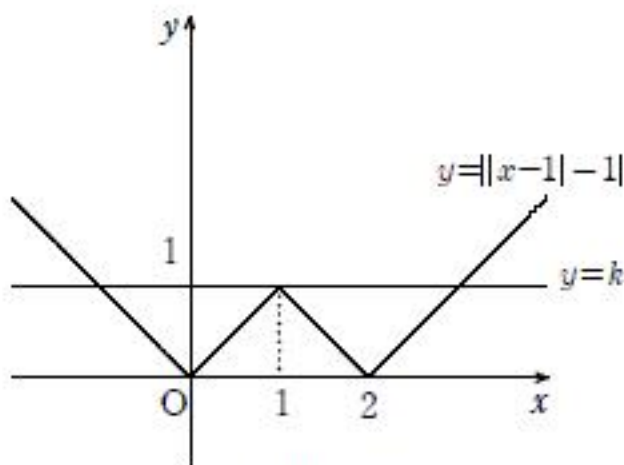


図1

となり, $y = f(x)$ のグラフは図1の通り.

$f(x) = k$ がちょうど3個の実数解を持つのは,

$y = f(x)$ と $y = k$ が3点で交わる場合だから, グラフより

$$k = 1 \quad \dots (\text{答})$$

のときである.

$$(2) |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \text{より}$$

$$|x|f(x) = \begin{cases} x(x-2) & (x \geq 2) \\ x(-x+2) & (1 \leq x < 2) \\ x \cdot x & (0 \leq x < 1) \\ (-x) \cdot (-x) & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 2) \\ -x^2 + 2x & (1 \leq x < 2) \\ x^2 & (x < 1) \end{cases}$$

となるので, $|x|f(x) = \frac{1}{2}$ を解くと

$$x \geq 2 \text{ のとき} \quad x^2 - 2x = \frac{1}{2} \text{ より} \quad x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき} \quad -x^2 + 2x = \frac{1}{2} \text{ より} \quad x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x < 1 \text{ のとき} \quad x^2 = \frac{1}{2} \text{ より} \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって, 求める実数解は

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots (\text{答})$$

[II]

(1) 正弦定理より $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ であるから

$$a = 2R \sin A = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad b = 2R \sin B = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

このとき、三角形 ABC の成立条件より $|a-b| < c < a+b$ であるから

$$1 < c < 5 \quad \cdots (*)$$

である。ここで、 $\sin A = \frac{1}{2}$ に注目すると、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より

$A = 30^\circ$ または 150° であり、余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ より

$$\begin{aligned} A = 30^\circ \text{ のとき} \quad 3^2 &= 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2 \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c^2 - 2\sqrt{3}c - 5 &= 0 \quad \therefore c = 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (\because (*)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = 150^\circ \text{ のとき} \quad 3^2 &= 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2 \cdot c \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ c^2 + 2\sqrt{3}c - 5 &= 0 \quad \therefore c = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \quad (\because (*)) \end{aligned}$$

よって $c = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \quad \cdots (\text{答})$

(2) $\cos A = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos B = \frac{1}{7}$, $0^\circ < B < 180^\circ$ より $\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ であり,

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin \{180^\circ - (A+B)\} \\ &= \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

正弦定理より $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{14}{\sqrt{3}}$ となり

$$\left. \begin{aligned} a &= 2R \sin A = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \\ b &= 2R \sin B = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 8 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (\text{答})$$

〔文学部Ⅲ〕

(1) 余事象で考える.

N が奇数になるのは 8 個のさいころが全て奇数のとき.

1 個のさいころを投げて奇数の目 (1, 3, 5) が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であり, 各々のさいころの目の出方は独立だから

$$(N \text{ が奇数になる確率}) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

よって, N が偶数になる確率は $1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$ …(答)

(2) N が奇数のとき, さいころの目は全て 1, 3, 5 のどれかであり

$$N = 1^p \times 3^q \times 5^r$$

(ただし p, q, r は $p+q+r=8, p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$ を満たす整数) と表すことができる.

$1^p = 1$ であり, 3 と 5 は互いに素であるから, (q, r) の組 1 つに対して N の値が 1 つ対応する. ここで $0 \leq p \leq 8$ に注意すれば,

「 N の取り得る値の個数」は,

「 $q \geq 0, r \geq 0, 0 \leq q+r \leq 8$ を満たす整数 q, r の組 (q, r) の個数」

と等しいので, これを数える.

$q=0$ のとき $0 \leq r \leq 8$ より r の数は 9 個

$q=1$ のとき $0 \leq r \leq 7$ より r の数は 8 個

⋮

$q=k$ のとき $0 \leq r \leq 8-k$ より r の数は $9-k$ 個

⋮

$q=8$ のとき $0 \leq r \leq 0$ すなわち $r=0$ より r の数は 1 個

あるから, 全部で

$$\sum_{k=0}^8 (9-k) = \sum_{n=1}^9 n = 45 \text{ (個)} \quad \dots \text{(答)}$$

(3) さいころの出た目の組み合わせで考える.

$2 \leq N \leq 9$ となる組み合わせを 1 の目が出たさいころの数で分類すると,

(i) 1 の目が 8 個のとき

$N=1$ となり $2 \leq N \leq 9$ を満たさないので不適. (確率は 0)

(ii) 1 の目が 7 個のとき

残り 1 個のさいころの目は 2, 3, 4, 5, 6 の 5 通りあるので

$$\text{このときの確率は } {}_8C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{40}{6^8}$$

(iii) 1 の目が 6 個のとき

残り 2 個のさいころの目の組み合わせは

$$(2, 2): N=4 \dots \text{確率は } {}_8C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{28}{6^8}$$

$$(2, 3): N=6 \dots \text{確率は } 2 \times {}_8C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{56}{6^8}$$

$$(2, 4): N=8 \dots \text{確率は } 2 \times {}_8C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{56}{6^8}$$

$$(3, 3): N=9 \dots \text{確率は } {}_8C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{28}{6^8}$$

これらは排反であるから (iii) の確率は

$$\frac{28}{6^8} + \frac{56}{6^8} + \frac{56}{6^8} + \frac{28}{6^8} = \frac{168}{6^8}$$

(iv) 1 の目が 5 個のとき

残り 3 個のさいころの目の組み合わせは $(2, 2, 2): N=8$ のみであり

$$\text{このときの確率は } {}_8C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{56}{6^8}$$

(v) 1 の目が 4 個以下のとき

2 以上の目が 4 個以上となり, $N \geq 2^4 = 16 > 9$ より

$2 \leq N \leq 9$ を満たすことはないので不適. (確率は 0)

(i) ~ (v) は排反であるから, 求める確率は

$$\frac{40}{6^8} + \frac{168}{6^8} + \frac{56}{6^8} = \frac{264}{6^8} = \frac{11}{3^2 \times 6^5} = \frac{11}{69984} \quad \dots \text{(答)}$$

〔経営学部Ⅲ〕

(1) $f(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$

$$= (3x-a)(x+a) \text{ より}$$

a は正の定数すなわち実数であるから $f(x)=0$ は必ず実数解を持ち

その解は $x = \frac{a}{3}, -a$ である.

また, $a > 0$ であるから $-a < 0 < \frac{a}{3}$ が成り立ち, これら 2 解は必ず異なる.

したがって, 求める条件は

$$(\text{大きい方の解}) < 1 \text{ すなわち } \frac{a}{3} < 1 \quad \therefore a < 3$$

$a > 0$ と合わせて, 求める a の値の範囲は $0 < a < 3$ …(答)

(2) (1) より $f(x)=0$ の解は $x = \frac{a}{3}, -a$ であり, $-a < \frac{a}{3}$ に注意すれば

$$\alpha = -a, \quad \beta = \frac{a}{3}$$

となる. このとき $y=f(x)$ のグラフは図 2 のようになり

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{-f(x)\} dx, \quad T = \int_{\beta}^1 f(x) dx \text{ であるので}$$

$$T-S = \int_{\beta}^1 f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \{-f(x)\} dx$$

$$= \int_{\beta}^1 f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$= \int_{\alpha}^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-a}^1 (3x^2 + 2ax - a^2) dx$$

$$= [x^3 + ax^2 - a^2x]_{-a}^1$$

$$= (1+a-a^2) - (-a^3+a^3+a^3)$$

$$= -a^3 - a^2 + a + 1 = g(a) \text{ とおけば,}$$

$$g'(a) = -3a^2 - 2a + 1 = -(3a-1)(a+1) \text{ より}$$

$$g'(a) = 0 \text{ のとき } a = \frac{1}{3} \text{ (} \because 0 < a < 3 \text{) となり, 増減表は次のようになる.}$$

a	0		$\frac{1}{3}$		3
$g'(a)$	$\swarrow$	+	0	-	$\searrow$
$g(a)$	(1)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	(-32)

$$g(0)=1, \quad g(3)=-32, \quad g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27} \text{ より}$$

$$g(a) \text{ すなわち } T-S \text{ のとり得る値の範囲は } -32 < T-S \leq \frac{32}{27} \quad \dots \text{(答)}$$

