

[1]

(1) コインを5回投げて1で止まるのは、表が3回、裏が2回出る場合で

その確率は ${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \quad \dots(\text{答})$

(2) (1)の場合で途中で少なくとも1回-1の位置にあるためには、

(i) 1回目で裏が出る場合

(ii) 1回目で表が出て2, 3回目で連続で裏が出る場合

がある。

(i)の場合、残りの4回は表3回と裏1回がどのような順番で出てもしっかりするので、その確率は

$$\frac{1}{2} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

(ii)の場合、残りの2回は表になるからその確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(i)(ii)は排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32} \quad \dots(\text{答})$$

(3) コインを7回投げて1に止まるのは、表が4回、裏が3回出るときであり、その途中2と-1のうちどちらに先に到達するかで場合分けして考える。

(i) 先に2に到達する場合

2へ到達してから-1へ行くには裏が3回以上出る必要があり、全部で裏は3回しか出ないので、2から-1へ移動する間に表が出てはいけない。このようなコインの出方は

表表裏裏裏表表

の順番の1通りである。

(ii) 先に-1に到達する場合

(a) 1回目に表が出た場合

2回目も表だと2に到達してしまうので2回目は必ず裏であり、-1から2へ行くには残り3回の表が連続で出る必要があるからこのようなコインの出方は

表裏裏表表表裏

の順番の1通りである。

(b) 1回目に裏が出た場合

(b-1) 2回目も裏の場合、-2から2へ行くには表が4連続で出る必要があるので 裏裏表表表表裏 の1通り

(b-2) 2回目表の場合、0から残り5回で2を通過して1に止まるので

① 3回目が裏の場合

-1から2に到達するには残り3回の表が連続で出る必要がある。したがって、このようなコインの出方は

裏表裏表表表裏

の順番の1通り。

② 3回目が表の場合

(②-1) 4回目が裏の場合、0の位置から3回で2へ行っても1で止まるから 裏表表裏表表裏 の1通り。

(②-2) 4回目が表の場合、残りの表1回と裏2回はどのような順番で出てもしっかりするので、全部で ${}_3C_1 = 3$ 通り。

(i), (ii)より条件を満たすコインの出方は全部で8通りあるから

求める確率は $\frac{8}{2^7} = \frac{1}{16} \quad \dots(\text{答})$

(1) $f(x+h)-f(x) \geq f'(x)h \quad \cdots (*)$ とおく.

(証明) (i) $h=0$ のとき (左辺) $= f(x+0)-f(x)=0$

$$(右辺) = f'(x) \times 0 = 0$$

よって, 任意の実数 x について $f(x+h)-f(x) = f'(x)h$ となる.

(ii) $h>0$ のとき $(*) \iff \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq f'(x)$ である.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a>0$) は放物線であり, 連続な関数であるから $f(x)$ に対して平均値の定理を用いると, 任意の実数 x に対して

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = f'(d) \quad (x \leq d \leq x+h) \quad (\because h>0)$$

を満たす実数 d が存在する. このとき

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) &= f'(d) - f'(x) \\ &= (2ad+b) - (2ax+b) \\ &= 2a(d-x) \geq 0 \quad (\because a>0, d \geq x) \end{aligned}$$

よって $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq f'(x)$ すなわち $(*)$ は成り立つ.

(iii) $h<0$ のとき $(*) \iff \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f'(x)$ であるから,

(ii) と同様に $f(x)$ に対して平均値の定理を用いれば,

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{x-(x+h)} = f'(e) \quad (x+h \leq e \leq x) \quad (\because h<0)$$

を満たす実数 e が存在し,

$$\begin{aligned} f'(e) &= \frac{f(x)-f(x+h)}{-h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{であるから} \\ f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= f'(x) - f'(e) \\ &= (2ax+b) - (2ae+b) \\ &= 2a(x-e) \geq 0 \quad (\because a>0, x \geq e) \end{aligned}$$

よって $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f'(x)$ すなわち $(*)$ は成り立つ.

(i), (ii), (iii) より, 任意の実数 x, h について $(*)$ が成り立つ. (証明終)

$$\begin{aligned} (2) \quad tx - f(x) &= tx - (ax^2 + bx + c) \\ &= -ax^2 + (t-b)x - c \\ &= -a \left(x - \frac{t-b}{2a} \right)^2 + \frac{(t-b)^2}{4a} - c \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

$a>0$ より $tx-f(x)$ は上に凸の放物線となる.

ここで, x の定義域は実数全体であり, t は任意の実数であるから, $a \neq 0$

より $x = \frac{t-b}{2a}$ を満たす x, t の組は必ず存在する.

よって $tx-f(x)$ は

$$x = \frac{t-b}{2a} \text{ のとき 最大値 } z(t) = \frac{(t-b)^2}{4a} - c \text{ をとる.} \quad \cdots (\text{答})$$

(3) (証明)

(2) より $tx-f(x) \leq z(t) \quad \cdots \textcircled{1}$ が任意の x, t について成り立ち,

$$x = \frac{t-b}{2a} \text{ のとき } tx-f(x) = z(t) \text{ である.}$$

$\textcircled{1}$ を変形すると $xt-z(t) \leq f(x)$ となり, この式も任意の t, x について成り立つ. ここで $a>0$ より,

$$x = \frac{t-b}{2a} \iff t = 2ax + b$$

を満たす実数 t, x の組は必ず存在する, すなわち,

$$xt - z(t) = f(x) \text{ を満たす実数 } t, x \text{ は存在する}$$

から $xt-z(t)$ の最大値は $f(x)$ ($t=2ax+b$ のとき) である.

よって $xt-z(t)$ の最大値を $g(x)$ とおけば $g(x) = f(x)$ となる. (証明終)

(1) (証明)

(I) $n=1$ のとき

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^k k^2 = -1, \quad S_2 = \sum_{k=1}^2 (-1)^k k^2 = -1 + 4 = 3 \quad \text{より,}$$

$$(\text{左辺}) = S_1 + S_2 = -1 + 3 = 2$$

$$(\text{右辺}) = (-1)^{1+1} (1+1) = 2$$

よって $S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)$ は成り立つ.

(II) $n=k$ のとき

$$S_k + S_{k+1} = (-1)^{k+1} (k+1) \quad \cdots (*)$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} S_{k+2} &= \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^i i^2 = \left\{ \sum_{i=1}^k (-1)^i i^2 \right\} + (-1)^{k+1} (k+1)^2 + (-1)^{k+2} (k+2)^2 \\ &= S_k + (-1)^{k+1} (k+1)^2 + (-1)^{k+2} (k+2)^2 \quad \text{より,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} + S_{k+2} &= S_{k+1} + \{ S_k + (-1)^{k+1} (k+1)^2 + (-1)^{k+2} (k+2)^2 \} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1) + (-1)^{k+1} (k+1)^2 + (-1)^{k+2} (k+2)^2 \quad (\because (*)) \\ &= (-1)^{k+1} \{ (k+1) + (k+1)^2 - (k+2)^2 \} \\ &= (-1)^{k+1} (-k-2) \\ &= (-1)^{k+2} (k+2) \end{aligned}$$

よって $k=n+1$ のときも成り立つ.

(I), (II) より, 全ての自然数 n について $S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)$

が成り立つ. (証明終)

(2) $S_n - S_{n+1} = -\{(-1)^{n+1} (n+1)^2\}$ より

$$S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1) \quad \text{と辺々を足すと}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (-1)^{n+1} (n+1) - \{(-1)^{n+1} (n+1)^2\} \\ &= (-1)^{n+1} \{ (n+1) - (n+1)^2 \} = (-1)^n n(n+1) \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1) \quad \cdots (\text{答})$$

円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (X, Y) における接線の方程式は $Xx + Yy = 1$ で表され, この接線が点 $P(p, q)$ を通るから

$$Xp + Yq = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 点 (X, Y) は円 C 上の点だから $X^2 + Y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$ が成り立つ.

①と② $\times q^2$ を連立して Y を消去すると

$$\begin{aligned} q^2 X^2 + (1 - pX)^2 &= q^2 \quad \text{より} \\ (p^2 + q^2)X^2 - 2pX + 1 - q^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となり, ③の実数解が接点の x 座標である.

(1) $p=5, q=5$ のとき③より

$$50X^2 - 10X - 24 = 0$$

$$2(5X+3)(5X-4)=0 \quad \therefore X = -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

よって①より $(X, Y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ となり, 求める接線の方程式は

$$3x - 4y + 5 = 0 \quad \text{と} \quad 4x - 3y - 5 = 0 \quad \cdots (\text{答})$$

(2) $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ について

円外の点 P から円へ引いた 2 本の接線の接点 A, B までの距離は等しいから, $PA = PB$ が成り立つ. また, A, B は円 C 上の点であるから $OA = OB$, OP は共通だから $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (三辺相等) が成り立ち,

$$\angle POA = \angle POB$$

よって, AB と OP の交点を Q とおくと, OQ は $\angle AOB$ の 2 等分線となり

$$AQ : BQ = OA : OB = 1 : 1$$

$$\therefore AQ = BQ$$

したがって, Q は線分 AB の中点 R であるから, R は直線 OP 上の点である.

(証明終)

(3) $R(r, s)$ とし, 接点 A, B の x 座標を α, β とおく.

点 $P(p, q)$ が $x^2 + y^2 = 36$ 上を動くことから $p^2 + q^2 = 36 \quad \cdots \textcircled{4}$

③の判別式を D とすると, ④より

$D/4 = p^2 - 36(1 - q^2) = 35q^2 \geq 0$ となり③は必ず実数解を持ち, α, β は 2 次方程式③の 2 実数解であるから,

$$\alpha + \beta = \frac{2p}{36} = \frac{p}{18} \quad \cdots \textcircled{5}$$

また, (2) より R は直線 OP 上の点であるから $ps - qr = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$

ここで, R は線分 AB の中点であるから, ⑤より

$$r = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{p}{36} \quad \therefore p = 36r \quad \cdots \textcircled{7}$$

よって⑥より $p(36s - q) = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$

ここで $p=0$ と $p \neq 0$ に分けて考える.

(i) $p \neq 0$ のとき

$$\textcircled{7} \text{より } r \neq 0 \text{ であり, } \textcircled{8} \text{より } q = 36s \quad \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑨を④に代入して

$$(36r)^2 + (36s)^2 = 36 \quad \therefore r^2 + s^2 = \frac{1}{36}$$

このとき $r \neq 0$ より $s \neq \pm \frac{1}{6}$ である.

(ii) $p=0$ のとき

$$\textcircled{4} \text{より } q = \pm 6 \text{ であり,}$$

$$q=6 \text{ のとき } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より } (X, Y) = \left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

これらが A, B の座標であるから, その中点 R は $\left(0, \frac{1}{6}\right)$

$$q=-6 \text{ のとき } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より } (X, Y) = \left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, -\frac{1}{6} \right), \therefore R \left(0, -\frac{1}{6}\right)$$

(i), (ii) より $R(r, s)$ は $r^2 + s^2 = \frac{1}{36}$ を満たす点全てとなるから,

$$\text{求める } R \text{ の軌跡は } x^2 + y^2 = \frac{1}{36} \quad \cdots (\text{答})$$

台形 ABCD の面積を S , $AB = a$, $AD = b$ とおく.

(1) 台形の外接円は $\triangle ABC$ にも外接しているから, 正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2\sqrt{7} \quad \therefore AC = 2\sqrt{7} \sin 60^\circ = \sqrt{21} \quad \dots (\text{答})$$

$AB = 2\sqrt{3}$ のとき, $\triangle ABH$ は直角三角形であるから, $AH = AB \sin 60^\circ = 3$,
 $BH = AB \cos 60^\circ = \sqrt{3}$ である.

ところで, 台形 ABCD は円に内接する四角形であるから

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \quad \therefore \angle ADC = 120^\circ$$

また, $AD \parallel BC$ より $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$ であるから, 台形 ABCD は
 等脚台形であり $AB = DC$, $AC = DB$ が成り立つ.

このとき, $\triangle ABD$ について余弦定理より

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$$

$$21 = 12 + b^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3}b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\because BD = AC = \sqrt{21})$$

$$b^2 + 2\sqrt{3}b - 9 = 0$$

$$(b + 3\sqrt{3})(b - \sqrt{3}) = 0 \quad \therefore b = \sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

また, D から BC へ下ろした垂線の足を I とおくと $\triangle ABH \equiv \triangle DCI$ より

$CI = BH = \sqrt{3}$, 四角形 AHID は長方形より $AD = HI = \sqrt{3}$ となり

$$BC = BH + HI + IC = 3\sqrt{3}$$

したがって, 台形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)AH = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) \cdot 3 = 6\sqrt{3} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $AB = a$, $AD = b$ として (1) より

$$BH = CI = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}, \quad AH = AB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad HI = AD = b,$$

$$BC = BH + HI + IC = BC = 2BH + AD = a + b$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(AD + BC)AH = \frac{1}{2}(b + a + b) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a(a + 2b) \quad \dots (\text{答})$$

$$\text{また, } (\triangle ACH \text{ の面積}) = \frac{1}{2}CH \cdot AH = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{8}a(a + 2b) \text{ より}$$

$$(\text{台形 ABCD の面積}) : (\triangle ACH \text{ の面積}) = 2 : 1 \quad \dots (\text{答})$$

(3) $\triangle ABD$ について余弦定理より

$$21 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ \quad \therefore b^2 + ab + a^2 - 21 = 0 \quad \dots (*)$$

ここで, (*) を満たす a, b が存在するための条件として, (*) を b の 2 次方程式
 とみて判別式を D とおくと, $a > 0$ に注意すれば

$$D = a^2 - 4(a^2 - 21) = 84 - 3a^2 \geq 0 \quad \therefore 0 < a \leq 2\sqrt{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $BC \leq (\text{外接円の直径})$ でなければならないから $BC = a + b \leq 2\sqrt{7} \quad \dots \textcircled{2}$

$\triangle ABD$ について三角形の成立条件から $|a - b| < BD = \sqrt{21} < a + b \quad \dots \textcircled{3}$

$$\text{このとき (*) より} \quad b = \frac{-a + \sqrt{84 - 3a^2}}{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}a(a + 2b) = \frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{84 - 3a^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{28 - a^2}$$

$S > 0$ より S が最大るとき S^2 も最大になることから, S^2 の最大値を調べる.

$$S^2 = \frac{9}{16}a^2(28 - a^2) = -\frac{9}{16}(a^2 - 14)^2 + \frac{3^2 \cdot 7^2}{2^2}$$

ここで, $a = \sqrt{14}$ (①を満たす) が ② ③ を満たすかどうかを調べると,

$$a = \sqrt{14} \text{ より } b = \frac{-\sqrt{14} + \sqrt{42}}{2} = \frac{\sqrt{14}(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ であるから}$$

$$a + b = \frac{\sqrt{14}(\sqrt{3} + 1)}{2} = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ここで, $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3} < 15 < 4^2$, $\sqrt{6} + \sqrt{2} > 0$ より

$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} < 1$ であるから $a + b < 2\sqrt{7}$ よって ② を満たす. また,

$$a + b = \frac{\sqrt{14}(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}} = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{18} + \sqrt{6}}{6}$$

$\sqrt{18} > 4$, $\sqrt{6} > 2$ より $\sqrt{18} + \sqrt{6} > 6$ となり $a + b > \sqrt{21}$

$$|a - b| = \left| \frac{\sqrt{14}(\sqrt{3} - 1)}{2} \right| = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2} = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{6} < 3$, $\sqrt{2} > 1$ より $\sqrt{6} - \sqrt{2} < 2$ となり $|a - b| < \sqrt{21}$

よって ③ も満たすので, S の最大値は $AB = \sqrt{14}$ のとき $\frac{21}{2}$ である. $\dots (\text{答})$