

[1]

(1) $y = -x^2 + 2x + 3$ の $(t, -t^2 + 2t + 3)$ における接線は

$$y = (-2t + 2)x + t^2 + 3$$

であり, この接線の傾きが 2 になるのは $-2t + 2 = 2 \therefore t = 0$ のとき.

したがって, 接線は $y = 2x + 3$ となるから

直線 $y = 2x + \boxed{3}$ は $x = \boxed{0}$ において放物線と接する.

…ア, イ

(2) $y = |x^2 - 2x - 3|$ と $y = |2x + a|$ が 3 点で交わるのは, 図 1 より

$(2, 3)$ で接するとき $a = \boxed{-7}$ …ウ

$(3, 0)$ を通るとき $a = \boxed{-6}$ …エ

$(-1, 0)$ を通るとき $a = \boxed{2}$ …オ

$(0, 3)$ で接するとき $a = \boxed{3}$ …カ

のときである.

(3) $y = |4x + b|$ と x 軸との交点は $\left(-\frac{b}{4}, 0\right)$ である.

$y = |x^2 - 2x - 3|$ と $y = |4x + b|$ は, $(-1, 0), (3, 0)$ において両側の曲線に接することに注意すれば, 2 つの共有点を持つのは, 図 2 より

$$-\frac{b}{4} \leq -1 \quad \text{または} \quad -\frac{b}{4} \geq 3$$

すなわち

$b \leq \boxed{-12}$ または $b \geq \boxed{4}$ のときである. …キ-⑩, ク-⑥

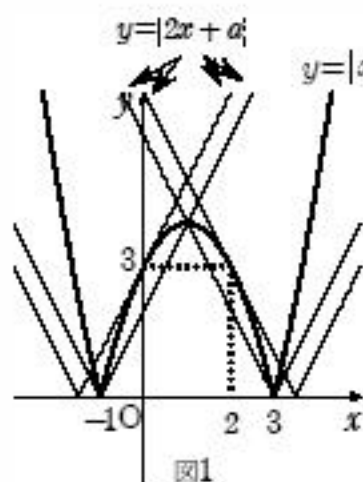


図1

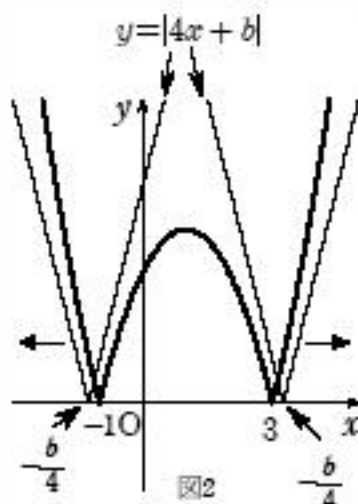


図2

〔Ⅱ〕

(1) $\triangle ABC$ について正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ は外接円の半径}) \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } a+b+c &= 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 2R(\sqrt{2}+1)\sin C = (\sqrt{2}+1)c \end{aligned}$$

$$a+b+c=3+3\sqrt{2} \quad \text{より} \quad c = \frac{3+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \boxed{3} \quad \dots \text{ア}$$

(2) (1) より $a+b=3\sqrt{2}$, $c=3$ であり,

$$\text{余弦定理より } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{よって} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because \sin A > 0)$$

$$= \frac{1}{2bc} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{1}{2bc} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$$

$$= \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \sqrt{\boxed{-4}a^2 + \boxed{12}\sqrt{2}a - \boxed{9}} \quad \dots \text{イ} \sim \text{ク}$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt{-4 \left(a - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 9}$$

$$\text{したがって, } a = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{2}} \quad \text{のとき } S \text{ は最大値 } \frac{\boxed{9}}{\boxed{4}} \quad \text{をとる.} \quad \dots \text{ケ} \sim \text{ス}$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A = 2 \sin C \quad \text{より} \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{3}{4}b$$

$$(*) \text{ より } a \frac{\sin C}{\sin A} = c \quad \therefore \frac{3}{4}ab = 3 \quad \therefore ab = \boxed{4} \quad \dots \text{セ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab - c^2}{2ab} = \frac{(3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 - 9}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} \quad \dots \text{ソ, タ} \end{aligned}$$

〔Ⅲ〕

$f'(x) = 3(x+2)^2$ より $(t, f(t))$ ($t \neq -2$) における接線は

$$y = 3(t+2)^2(x-t) + (t+2)^3$$

x 軸と交わる点は $0 = 3(t+2)^2(X-t) + (t+2)^3$ より

$$(t+2)^2 \{3(X-t) + t+2\} = 0$$

$$t \neq -2 \text{ より } 3X - 3t + t + 2 = 0 \quad \therefore X = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}t - \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \quad \dots \text{ア} \sim \text{エ}$$

$$t > -2 \text{ のとき } \frac{2}{3}t - \frac{2}{3} > -2 \text{ よって } X > \boxed{-2} \quad \dots \text{オカ}$$

$$(1) \quad x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} = \boxed{-1} \quad \dots \text{キク}$$

$$(2) \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3} \text{ より } x_{n+1} + 2 = \frac{2}{3}(x_n + 2) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\therefore x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (x_1 + 2) - 2$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2$$

$$= \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\right)^{\boxed{n-2}} - \boxed{2}$$

$\dots \text{ケ, コ, サ} - \text{⑩}, \text{シ}$

[IV]

(準備)

直線 $y=kx+b$ と 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ の2つの共有点を

$A(\alpha, k\alpha+b), B(\beta, k\beta+b)$ ($\alpha < \beta$) とする. このとき,

$$\triangle ABO = \frac{1}{2} |\alpha(k\beta+b) - \beta(k\alpha+b)| = \frac{1}{2} |b(\alpha-\beta)|$$

$$= \frac{1}{2} b(\beta-\alpha) \quad (\because b > 0, \beta-\alpha > 0)$$

$$d = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + \{(k\beta+b) - (k\alpha+b)\}^2}$$

$$= (\beta-\alpha) \sqrt{1+k^2} \quad (\because \beta-\alpha > 0)$$

であり, α, β は方程式 $(1+4k^2)x^2 + 8kbx + 4b^2 - 4 = 0$ の2つの解より

$$\alpha + \beta = \frac{-8kb}{1+4k^2}, \quad \alpha\beta = \frac{4(b^2-1)}{1+4k^2}$$

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{16k^2b^2 - (1+4k^2) \cdot 4(b^2-1)}}{1+4k^2} = \frac{4\sqrt{1+4k^2-b^2}}{1+4k^2}$$

$$(1) \quad k=0 \text{ のとき } S = \frac{1}{2} b(\beta-\alpha) = \frac{1}{2} b \cdot 4\sqrt{1-b^2} = \boxed{2} b \sqrt{\boxed{1}-b^{\boxed{2}}} \quad \dots \text{ア} \sim \text{ウ}$$

であり, $S > 0$ より S が最大するとき S^2 も最大となることから

$$S^2 = 4b^2(1-b^2) = -4\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

したがって, S^2 および S は $b^2 = \frac{1}{2}$ すなわち $b = \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$ ($\because b > 0$) のとき

最大となる. ...エ, オ

$$(2) \quad k = \frac{1}{2}, d=2 \text{ のとき } d^2 = (\beta-\alpha)^2(1+k^2) \text{ より}$$

$$4 = \left(\frac{4\sqrt{1+1-b^2}}{1+1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 5(2-b^2)$$

$$\text{よって } b^2 = \frac{6}{5} \text{ より } b = \frac{\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{5}} \quad (\because b > 0) \quad \dots \text{カ} \sim \text{ク}$$

$$(3) \quad d=2, S=1 \text{ より}$$

$$2 = (\beta-\alpha) \sqrt{1+k^2}$$

$$1 = \frac{1}{2} b(\beta-\alpha) \iff 2 = (\beta-\alpha)b$$

$\beta-\alpha \neq 0$ より $b = \sqrt{1+k^2} \therefore b^2 = 1+k^2$ が成り立つ.

よって

$$2 = \frac{4\sqrt{1+4k^2-(1+k^2)}}{1+4k^2} \sqrt{1+k^2} \text{ より}$$

$$(1+4k^2) = 2\sqrt{3k^2} \sqrt{1+k^2}$$

両辺2乗して

$$(1+4k^2)^2 = 4 \cdot 3k^2(1+k^2)$$

$$16k^4 + 8k^2 + 1 = 12k^4 + 12k^2$$

$$4k^4 - 4k^2 + 1 = 0 \quad \therefore k^2 = \frac{1}{2}$$

$k \geq 0, b > 0$ より $k = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ であるから

直線 AB の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}} x + \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}} \quad \dots \text{ケ} \sim \text{シ}$$

[V]

(1) (x, y) と (X, Y) の中点は $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}\right)$ であり, これが l 上にあるから

$$\frac{y+Y}{2} = k \frac{x+X}{2} \quad \therefore \boxed{Y+y} = k(\boxed{X+x}) \quad \cdots \text{ア-⑥}, \text{イ-⑤}$$

また, 2 点を通る直線の傾きは $X \neq x$ のとき $\frac{Y-y}{X-x}$ (このとき $k \neq 0$) であり,

$$\frac{Y-y}{X-x} \cdot k = -1 \quad \therefore X-x = -k(Y-y)$$

これは $k=0$ (このとき $X=x$ となる) についても成り立つ.

$$\text{よって } \boxed{X-x} = -k(\boxed{Y-y}) \quad \cdots \text{ウ-⑦}, \text{エ-⑧}$$

これより

$$\begin{cases} kX - Y = -kx + y \\ X + kY = x + ky \end{cases} \iff \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = k^2 + 1 \neq 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 + 1} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } A = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} \boxed{1-k^2} & \boxed{2k} \\ \boxed{2k} & \boxed{k^2-1} \end{pmatrix} \quad \cdots \text{オ-⑤}, \text{カ-⑦}, \text{キ-⑦}, \text{ク-⑥}$$

(2) $k = \tan \theta$ より $1+k^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であるから

$$\frac{1-k^2}{1+k^2} = \cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\frac{2k}{1+k^2} = \cos^2 \theta (2 \tan \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$\text{よって } A = \begin{pmatrix} \boxed{\cos 2\theta} & \boxed{\sin 2\theta} \\ \boxed{\sin 2\theta} & \boxed{-\cos 2\theta} \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ケ-⑦}, \text{コ-⑤}, \text{サ-⑤}, \text{シ-⑧}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \sin 2\theta \\ -3 \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

3 点 $P(2, 1)$, $Q(X_1, Y_1)$, $R(X_2, Y_2)$ を頂点とする三角形の面積 S は,

この三角形を平行移動した $O(0, 0)$, $Q'(X_1-2, Y_1-1)$, $R'(X_2-2, Y_2-1)$ を頂点とする三角形の面積と等しく

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(X_1-2)(Y_2-1) - (Y_1-1)(X_2-2)| \\ &= \frac{1}{2} |(\cos 2\theta - 2)(-3 \cos 2\theta - 1) - (\sin 2\theta - 1)(3 \sin 2\theta - 2)| \\ &= \frac{1}{2} |5(\sin 2\theta + \cos 2\theta) - 3(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)| \\ &= \frac{1}{2} |5\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 3| \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad -\frac{3}{4}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi \quad \text{であり,}$$

$-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi$ における $y = |5\sqrt{2} \sin x - 3|$ のグラフは図 3 のようになるから,

$$S \text{ は } x = -\frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{\pi}{4} \text{ すなわち } \theta = \frac{\boxed{-3}}{\boxed{8}}\pi \quad \cdots \text{ス} \sim \text{ソ}$$

のとき最大で, その最大値は

$$\frac{1}{2} |-5\sqrt{2} - 3| = \frac{\boxed{3} + \boxed{5}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}} \quad \cdots \text{タ} \sim \text{テ}$$

である.

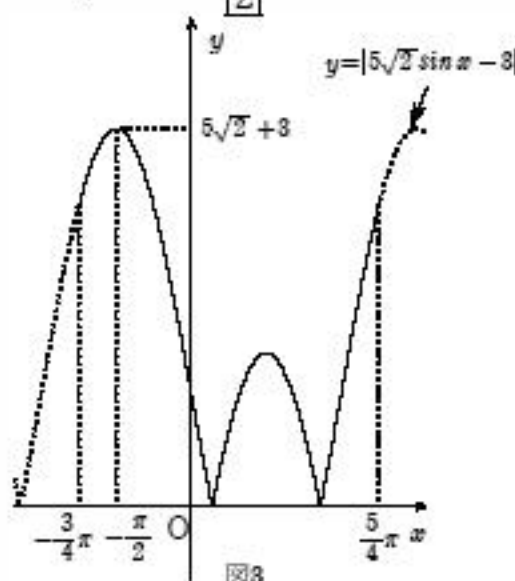


図3

[VI]

$$y = \log x \text{ より } y' = \frac{1}{x}$$

点 $P(t, \log t)$ における法線の傾き m は $m \cdot \frac{1}{t} = -1$ より $m = -t$

であるから、法線 l の方程式は

$$y = -t(x - t) + \log t$$

l と x 軸との交点は $0 = -t(X - t) + \log t$ より

$$X = \boxed{t} + \frac{\boxed{\log t}}{\boxed{t}} \quad \dots \text{ア-⑨, イ-⑥, ウ-⑩}$$

$\triangle PQH$ の面積 $= \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH$, $PH = \log t$, $QH = X - t = \frac{\log t}{t}$ より

$$g(t) = \frac{1}{2} \cdot \log t \cdot \frac{\log t}{t} = \frac{\boxed{(\log t)^2}}{\boxed{2t}} \quad \dots \text{エ-⑧, オ-③}$$

である.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{2(\log t) \cdot \frac{1}{t} \cdot 2t - 2(\log t)^2}{(2t)^2} \\ &= \frac{\log t}{2t^2} (2 - \log t) \end{aligned}$$

$t > 1$ より $\log t > 0$ であり、増減表(表4)より

t	1		e^2	
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$			極大	

表4

$g(t)$ は $t = \boxed{e^2}$ において最大値 $\frac{2^2}{2e^2} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{e^2}} \dots \text{カ-⑦, キ-②, ク-⑦}$

をとる.

$\alpha = e^2$ とおくと $\sqrt{\alpha} = e$ となり

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} g(t) dt &= \int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (\log t)^3 \right]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{6} (8 - 1) = \frac{\boxed{7}}{\boxed{6}} \end{aligned}$$

$\dots \text{ケ, コ}$