

[1]

$$(1) \quad 10$$

$$(2) \quad x=2,-1$$

$$(3) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi \leq \theta < 2 \pi$$

$$(4) \quad \frac{5}{108}$$

$$(5) \quad -\frac{1}{4}$$

$$(6) \quad (a,b)=(6,12),\left(-\frac{9}{2},\frac{27}{4}\right)$$

$$(7) \quad \log_3 2 \leq t \leq 3$$

〔Ⅱ〕

〔A〕

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 1 = (x-1)^2 - a^2$$

$$= \{x - (1-a)\} \{x - (1+a)\} \cdots \textcircled{1}$$

とおく.

(1) $a=1$ のとき, $f(x)=x(x-2)$ より

$y=|f(x)|=|x(x-2)|$ のグラフは図1の通り.

(2) ①および $0 \leq a \leq 1$ より, $y=f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ における x 軸との

交点の x 座標は $x=1-a$ であり, 頂点の y 座標: $f(1)=-a^2 \leq 0$ より

$$0 \leq x \leq 1-a \text{ のとき } f(x) \geq 0,$$

$$1-a \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) \leq 0$$

となるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |f(x)| dx \\ &= \int_0^{1-a} f(x) dx + \int_{1-a}^1 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^{1-a} (x^2 - 2x + 1 - a^2) dx + \int_{1-a}^1 (x^2 - 2x + 1 - a^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + (1-a^2)x \right]_0^{1-a} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + (1-a^2)x \right]_{1-a}^1 \\ &= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\frac{dS}{da} = 4a^2 - 2a = 2a(2a-1)$ より増減表は表2のようになり,

$0 \leq a \leq 1$ において S は

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{4},$$

$$a = 1 \text{ のとき最大値 } \frac{2}{3}$$

a	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{dS}{da}$	0	-	0	+	(+)
S	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

表2

をとる. S はこの区間で連続であり間の値を全てとり得るから

求める S の値の範囲は

$$\frac{1}{4} \leq S \leq \frac{2}{3} \quad \cdots (\text{答})$$

〔B〕

(1) C_1 上の点を $P(X, Y)$ とおくと, 題意より $OP=PA$

すなわち $OP^2=PA^2$ であるから

$$X^2 + Y^2 = (3-X)^2 + (3-Y)^2$$

$$\therefore X+Y-3=0$$

よって C_1 の方程式は

$$x+y-3=0 \quad \cdots (\text{答})$$

次に, C_2 上の点を $Q(X', Y')$ とおくと, 題意より $2OQ=QA$

すなわち $4OQ^2=QA^2$ であるから

$$4(X'^2 + Y'^2) = (3-X')^2 + (3-Y')^2$$

$$\therefore (X'+1)^2 + (Y'+1)^2 = 8$$

よって C_2 の方程式は

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8 \quad \cdots (\text{答})$$

(2) C_2 は中心 $(-1, -1)$, 半径 $2\sqrt{2}$ の円であるから, A を通り C_2 と

ちょうど1つの共有点をもつ直線は, A を通る C_2 の接線である.

C_2 上の接点の座標を (a, b) とおくと, この点における接線は

$$(a+1)(x+1) + (b+1)(y+1) = 8$$

と書け, これが点 A を通るから

$$(a+1)(3+1) + (b+1)(3+1) = 8$$

$$\therefore a+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, (a, b) は C_2 上の点だから

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 = 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$(a, b) = (\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}) \quad (\text{複号同順})$$

よって, 求める直線の方程式と共有点の座標は

$$(1+\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3})y - 6 = 0 \quad \text{共有点: } (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

$$(1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y - 6 = 0 \quad \text{共有点: } (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$\cdots (\text{答})$

(3) 線分 OA と C_1, C_2 との交点を M, N とし, $C(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

C_2 の中心 $(-1, -1)$ を O' , C_1 と AC, AD との交点を E, F とおく.

$$ON:NA=1:2, OM:MA=1:1, OB:BA=2:3 \text{ より}$$

$$ON=\frac{1}{3}OA, OM=\frac{1}{2}OA, OB=\frac{2}{5}OA$$

$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ より B は N と M の間にあるから, 点 B の属する領域は

図3の斜線部である.

ところで,

$$CD \perp OO', OO' = \sqrt{2},$$

$$O'C = O'D = 2\sqrt{2}, OC = OD = \sqrt{6}$$

$$\text{より } \angle CO'O = \angle DO'O = \frac{\pi}{3}$$

また,

$$OA = 3\sqrt{2}, AC = AD = CD = 2\sqrt{6}$$

であり, $\triangle ACD$ は正三角形である.

さらに, $C_1 // CD$ より $\triangle ACD \sim \triangle AEF$ が成り立ち

$AM:MO=1:1$ より相似比は $2:1$, 面積比は $4:1$ である.

求める領域の面積を S とすれば,

$$S = (\text{台形 } CDFE) + (\triangle O'CD) - (\text{扇形 } O'CD)$$

であり,

$$\text{台形 } CDFE = \triangle ACD - \triangle AEF = \frac{3}{4} \triangle ACD = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OA$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle O'CD = \frac{1}{2} \cdot O'C \cdot O'D \cdot \sin \angle CO'D$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \sin \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{3}$$

$$\text{扇形 } O'CD = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$$\therefore S = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi = \frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3}\pi \quad \cdots (\text{答})$$

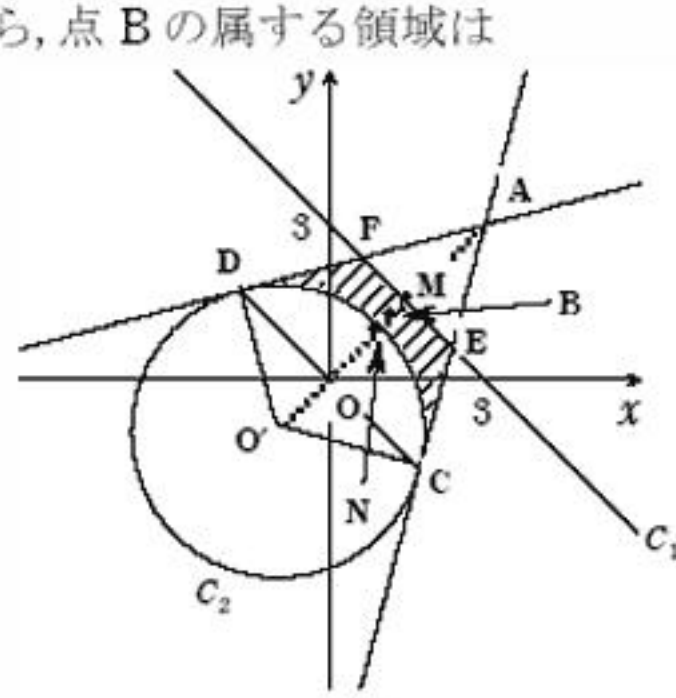


図3

〔C〕

(1) $AG:GE=t:1-t$ とおくと,

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OE} = (1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}t\overrightarrow{OB} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$DG:GB=s:1-s$ とおくと,

$$\overrightarrow{OG} = s\overrightarrow{OB} + (1-s)\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから, ①, ②より

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1}{4}(1-s) \\ \frac{2}{5}t = s \end{cases} \quad \therefore t = \frac{5}{6}, s = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) OG を延長して AB と交わる点を I とおく.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} \right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$$

より $OG:GI=1:1$, $AI:IB=2:1$ となり, $CF:FB=2:1$ であるから

$\triangle BFI \sim \triangle BCA$ (二辺の比と挟角が等しい)

したがって $\triangle BFI$ は正三角形であり $BF=BI=FI=\frac{1}{3}CA=2$ である.

また, $OF=OI (>0)$ であり

$$|\overrightarrow{OF}|^2 = \left| \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \right|^2 = \frac{1}{9} (4|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 4\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = 28$$

より $OF=OI=2\sqrt{7}$. $\triangle OFI$ について余弦定理より

$$\cos \angle FOI = \frac{OF^2 + OI^2 - FI^2}{2 \cdot OF \cdot OI} = \frac{13}{14}$$

$$\therefore \sin \angle FOI = \frac{3\sqrt{3}}{14} \quad (\because \sin \angle FOI > 0)$$

よって $\triangle OFG = \frac{1}{2} \triangle OFI$ ($\because OG:GI=1:1$)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot OF \cdot OI \cdot \sin \angle FOI = \frac{1}{4} \cdot 28 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

(3) $OH:HF=k:1-k$ とおく.

$$\triangle OCF = \frac{2}{3} \triangle OBC = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$$

より

$$\triangle OCH = k \triangle OCF = 6\sqrt{3}k$$

また,

$$\triangle FGH = (1-k) \triangle OFG = (1-k) \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\because (2))$$

となる.

$\triangle OCH = \triangle FGH$ を満たすとき

$$6\sqrt{3}k = (1-k) \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \therefore k = \frac{1}{5}$$

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= k \cdot \overrightarrow{OF} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \right) \\ &= \frac{2}{15} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{15} \overrightarrow{OC} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$