

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2(\cos \theta)x + \sin^2 \theta \\ &= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= (x - \cos \theta)^2 - \cos 2\theta \end{aligned}$$

よって $f(x)$ の最小値は $-\cos 2\theta$ であるからこれが 0 のとき、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より
 $0^\circ \leq 2\theta \leq 360^\circ$ なので、

$$2\theta = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ, 135^\circ$$

となる。

(答) $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

(2)

$$f(x) = (x - \cos \theta)^2 - 2\cos^2 \theta + 1$$

と変形できるので、放物線 $y = f(x)$ の頂点の x, y 座標は

$$x = \cos \theta$$

$$y = -2\cos^2 \theta + 1$$

と表せる。2 式から $\cos \theta$ を消去して、

$$y = -2x^2 + 1$$

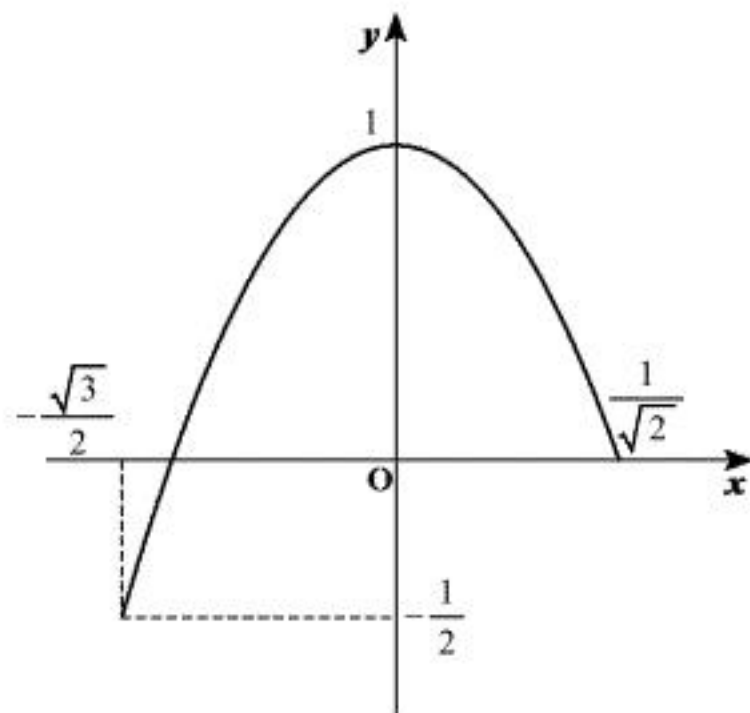
また $45^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ なので、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x = \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって求める軌跡は、

$$y = -2x^2 + 1 \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

であり、これを図示すると次図のようになる。



(答) 上図

〔Ⅱ〕

(1)

$$D_1: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

$$D_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 1$$

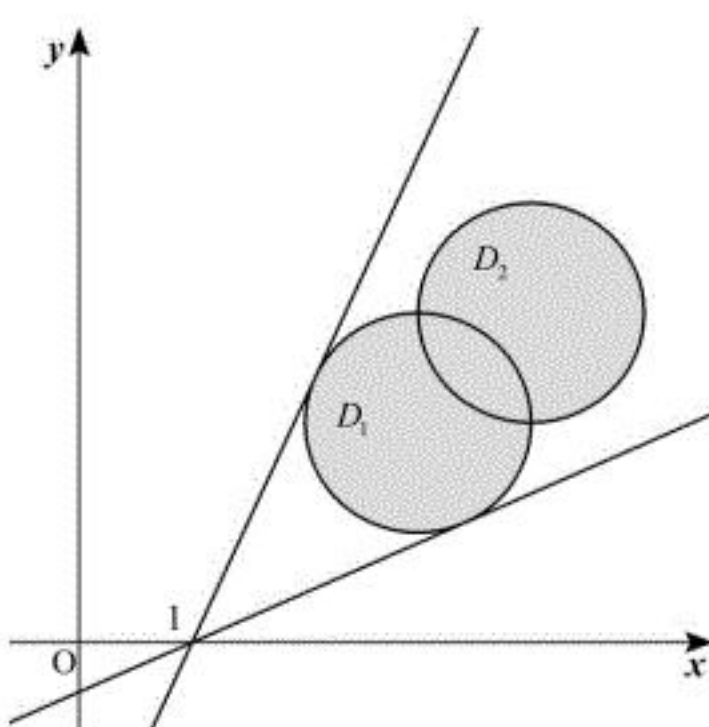
よって D_1 は中心 $(3, 2)$ 、半径 1 の円の周および内部を表し、 D_2 は中心 $(4, 3)$ 、半径 1 の円の周および内部を表す。また直線 $ax - y - a = 0$ は

$$y = a(x-1)$$

と変形できるので、これは a の値に関係なく点 $(1, 0)$ を通る、傾きが a の直線を表す。いま $D_1 \cup D_2$ が ℓ と共有点を持つ場合で、 ℓ の傾きが最大になるときと最小になるときを考えると、

それらは以下の図のように ℓ が円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ と接するときである。

ただし斜線部は領域 $D_1 \cup D_2$ を表す。



このとき円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ の中心 $(3, 2)$ と ℓ の距離が 1 なので、

$$\frac{|3a-2-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2|a-1| = \sqrt{a^2+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$3a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

よって傾きが最大るとき $a = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 、最小のとき $a = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ である。 a がこの間にあれば

$D_1 \cup D_2$ が ℓ と共有点を持つので、求める a の範囲は

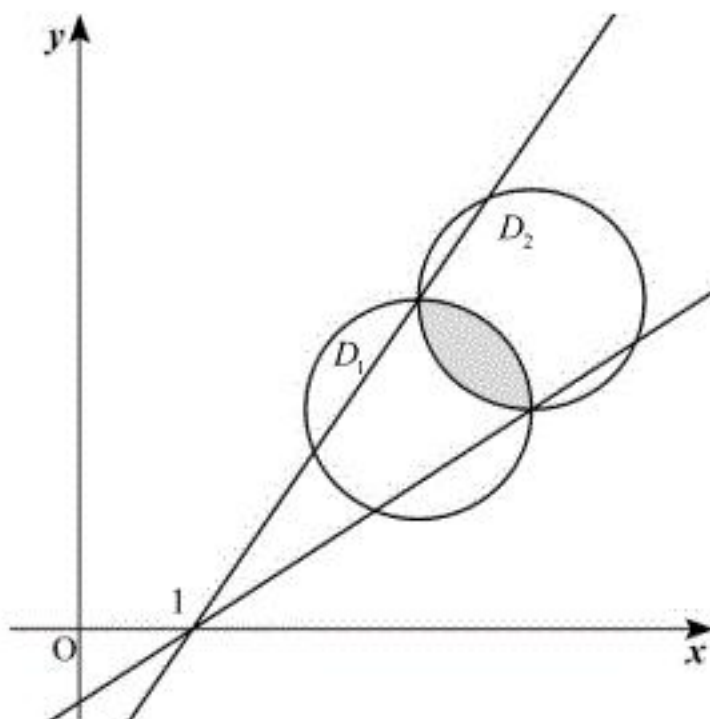
$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq a \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq a \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

(2)

同様に $D_1 \cap D_2$ が ℓ と共有点を持つ場合で ℓ の傾きが最大、最小となる場合を考えるとそれらは次図のような場合である。斜線部は領域 $D_1 \cap D_2$ を表す。



いま、2 つの円の方程式

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad \dots \text{①}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1 \quad \dots \text{②}$$

について考える。①-②として整理すると

$$y = -x + 6$$

これを①に代入して整理すると

$$(x-3)(x-4) = 0$$

ゆえに 2 円の共有点の x 座標は $x=3, 4$ であり、それぞれについて y 座標は $y=3, 2$ となる。

よって上図において ℓ の傾きが最大となるのは ℓ が点 $(3, 3)$ が通るときであり、最小となるのは ℓ が点 $(4, 2)$ を通るときである。 $\ell: ax - y - a = 0$ は $(1, 0)$ を通り傾きが a の直線であったから、傾きが最大るとき

$$a = \frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2}$$

傾きが最小のとき

$$a = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3}$$

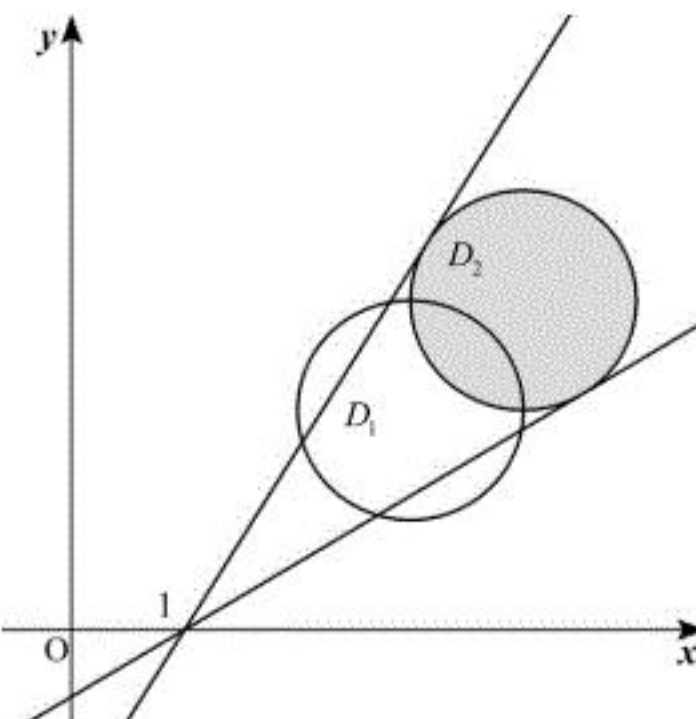
a がこの間にあれば $D_1 \cap D_2$ と ℓ が共有点をもつので、求める a の範囲は

$$\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

(3)

D_2 と ℓ が共有点を持つ場合で、 ℓ の傾きが最大、最小となる場合を考えると、それらは次図のような場合である。斜線部は領域 D_2 を表す。



このとき円 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ の中心 $(4, 3)$ と ℓ の距離が 1 なので、

$$\frac{|4a-3-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3|a-1| = \sqrt{a^2+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$4a^2 - 9a + 4 = 0$$

$$\therefore a = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$$

よって傾きが最大るとき $a = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$ 、最小のとき $a = \frac{9-\sqrt{17}}{8}$ である。 a がこの間にあれば

D_2 と ℓ が共有点を持つ。いま、図より D_2 と ℓ が共有点を持てば D_1 と ℓ も必ず共有点を持つ。ゆえに求める a の範囲は、 D_2 と ℓ が共有点を持つための a の範囲と等しく、

$$\frac{9-\sqrt{17}}{8} \leq a \leq \frac{9+\sqrt{17}}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9-\sqrt{17}}{8} \leq a \leq \frac{9+\sqrt{17}}{8}$$

〔文学部Ⅲ〕

(1)

$i^2 = -1$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3 \cdot 3i^2 + 3\sqrt{3}i^3}{8} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha^3 = -1$

(2)

$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ である。

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

であるので, (1)の結果も用いて

$$\alpha + \alpha = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\alpha + \alpha^2 = \sqrt{3}i$$

$$\alpha + \alpha^3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha + \alpha^4 = \alpha - \alpha = 0$$

$$\alpha + \alpha^5 = \alpha - \alpha^2 = 1$$

$$\alpha + \alpha^6 = \alpha + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2}$$

ゆえに 4, 5 の目が出るときに $\alpha + \alpha^x$ は実数となる。

サイコロの目の出方は同様に確からしいので, 求める確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(3)

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^3 = -1$$

$$\alpha^4 = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^5 = -\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^6 = 1$$

であるので, この中から 2 つの数を選んでその和を考え, それが 1 となる組み合わせを見つける。そのような組み合わせは α と α^5 のみである。ゆえに 2 つのサイコロを振ったときに一方は 1, 他方は 5 が出ればよい。どちらのサイコロにどちらの目が出るかで 2 通り考えられるので, 求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

である。

(答) $\frac{1}{18}$

〔経営学部Ⅲ〕 および 〔人間環境学部Ⅲ〕

(1)

点 D は直線 OC 上にあるので実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= k\overrightarrow{OC} \\ &= k\overrightarrow{OA} + 3k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せる。また点 D は直線 AB 上にあるので, 別の実数 l を用いて

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB}$$

とも表せる。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}, \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ かつ平行ではないので, これら 2 式の係数を比較すると

$$\begin{cases} k = l \\ 3k = 1 - l \end{cases}$$

これを連立させて解くと

$$k = l = \frac{1}{4}$$

したがって

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5 \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3\end{aligned}$$

であり線分 OD が $\angle AOB$ の二等分線となるので,

$$AD : DB = OA : OB = 5 : 3$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{3}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{8}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{8}(4, 0, 3) + \frac{5}{8}(-2, 1, 2) \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8} \right)\end{aligned}$$

より点 D の座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8} \right)$ である。また, 実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= s\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{3}{8}s\overrightarrow{OA} + \frac{5}{8}s\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せるが, $\overrightarrow{OC}$ における $\overrightarrow{OA}$ の係数は 1 なので

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}s &= 1 \\ \therefore s &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

よって

$$t = \frac{5}{8}s = \frac{5}{3}$$

となる。

(答) $t = \frac{5}{3}, D\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8}\right)$

(3)

$|\overrightarrow{OD}|$ が最小となるのは $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$ となるときである。点 D は直線 AB 上にあるので, 実数 m を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB} \\ &= m(4, 0, 3) + (1-m)(-2, 1, 2) \\ &= (6m-2, -m+1, m+2)\end{aligned}$$

と表せる。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (-2, 1, 2) - (4, 0, 3) \\ &= (-6, 1, -1)\end{aligned}$$

である。よって $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$ のとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (6m-2) \cdot (-6) + (-m+1) \cdot 1 + (m+2) \cdot (-1) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{11}{38}\end{aligned}$$

となる。実数 n を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= n\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{11}{38}n\overrightarrow{OA} + \frac{27}{38}n\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せるが, $\overrightarrow{OC}$ における $\overrightarrow{OA}$ の係数は 1 なので

$$\begin{aligned}\frac{11}{38}n &= 1 \\ \therefore n &= \frac{38}{11}\end{aligned}$$

よって

$$t = \frac{27}{38}n = \frac{27}{11}$$

となる。

(答) $t = \frac{27}{11}$