

〔I〕

(1)

$P(x)$ と $Q(x)$ が同じ 1 次式で割り切れる場合、 $3P(x)+Q(x)$ も同じ 1 次式で割り切れる。

$$3P(x)+Q(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

なので、 $x-1$ または $x+2$ で割り切れる場合について考えればよい。

[1] $x-1$ で割り切れる場合

$$P(1)=0 \Leftrightarrow a=1, \quad Q(1)=0 \Leftrightarrow a=1$$

よって、 $a=1$ のとき $x-1$ で割り切れる。

[2] $x+2$ で割り切れる場合

$$P(-2)=0 \Leftrightarrow a=10, \quad Q(-2)=0 \Leftrightarrow a=10$$

よって、 $a=10$ のとき $x+2$ で割り切れる。

(答) $a=1, 10$

(2)

[1] $a=1$ のとき

$$P(x)=(x-1)(2x+1), \quad Q(x)=(x-1)(x^2-5x-5)$$

となる。 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 双方で割り切れる多項式は、 $(x-1)$ 、 $(2x+1)$ 、 (x^2-5x-5) を因数として持つ必要があるので、求める多項式は実数 k を用いて

$$k(x-1)(2x+1)(x^2-5x-5)$$

と表される。

[2] $a=10$ のとき

$$P(x)=(x+2)(2x-5), \quad Q(x)=(x+2)(x-4)^2$$

となる。 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 双方で割り切れる多項式は、 $(x+2)$ 、 $(2x-5)$ 、 $(x-4)^2$ を因数として持つ必要があるので、求める多項式は 0 でない実数 k を用いて

$$k(x+2)(2x-5)(x-4)^2$$

と表される。

$$(\text{答}) \begin{cases} k(x-1)(2x+1)(x^2-5x-5) & (a=1 \text{ のとき}) \\ k(x+2)(2x-5)(x-4)^2 & (a=10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(ただし、 k は 0 でない任意の実数)

(3)

$$P(x)-Q(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8x^2+x+4a+2=0$$

この方程式は x に関する実数係数方程式なので、これが純虚数解を持つとき、左辺は

$(x^2+\alpha)(x+\beta)$ ($\alpha>0$, β は実数) と因数分解できる。

$$(x^2+\alpha)(x+\beta)=x^3+\beta x^2+\alpha x+\alpha\beta$$

なので、係数比較をすると

$$\alpha=1, \beta=-8, a=-\frac{5}{2}$$

を得る。これは確かに $\alpha>0$, β は実数という条件を満たしている。このとき、

$$P(x)-Q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-8)=0 \Leftrightarrow x=\pm i, 8$$

となる。

(答) $a=-\frac{5}{2}, x=\pm i, 8$

〔Ⅱ〕

(1)

15 点の中から無作為に 1 点を選んだ時、選んだ点の他に点は、同じ縦列に 4 点、同じ横列に 2 点存在するので、2 点が同じ縦列、もしくは同じ横列に並ぶようなもう 1 点の選び方は 6 通りある。一方でもう 1 点の選び方は全部で 14 通りあるので、求める確率は

$$\frac{4+2}{14} = \frac{3}{7}$$

(答) $\frac{3}{7}$

(2)

余事象として、選ばれた 3 点を線分で結び、三角形を描くことができない場合の数を考える。つまり、3 点が一直線に並ぶ場合の数を考える。

[1] 3 点が同じ縦列に並ぶ場合

ある縦列を選んだときに、その縦列の中で 3 点を選ぶ選び方は、 ${}_5C_3 = 10$ 通り。

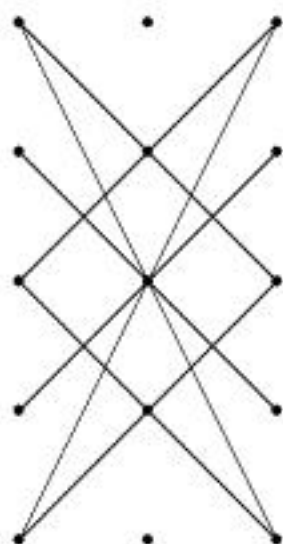
縦列の選び方は 3 通りあるので、 $10 \times 3 = 30$ 通り。

[2] 3 点が同じ横列に並ぶ場合

ある横列を選んだときに、その横列の中で 3 点を選ぶ選び方は、 ${}_3C_3 = 1$ 通り。

横列の選び方は 5 通りあるので、 $1 \times 5 = 5$ 通り。

[3] 3 点が斜めに並ぶ場合



3 点の選び方は前図の 8 通り。

よって、三角形を書くことができないような 3 点の選び方は $30 + 5 + 8 = 43$ 通りある。

3 点の選び方は全部で ${}_{15}C_3 = 455$ 通りあるので、求める確率は

$$1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$

(答) $\frac{412}{455}$

(3)

余事象として、選ばれた 4 点を線分で結んだときに、四角形を描くことができない場合の数を考える。つまり、少なくとも 3 点が一直線に並ぶ場合の数を考える。

[1] 4 点が同じ縦列に並ぶ場合

ある縦列の中から 4 点を選ぶ選び方は、 ${}_5C_4 = 5$ 通り。

縦列の選び方は 3 通りあるので、 $5 \times 3 = 15$ 通り。

[2] 3 点のみが同じ縦列に並ぶ場合

ある縦列の中から 3 点を選ぶ選び方は、 ${}_5C_3 = 10$ 通り。

その縦列とは別の縦列から 1 点を選ぶ選び方は 10 通り。

縦列は 3 列あるので、 $10 \times 10 \times 3 = 300$ 通り。

[3] 3 点が同じ横列に並ぶ、もしくは斜めに並ぶ場合

3 点が同じ横列に並ぶ、もしくは斜めに並ぶ並べ方は、(2)より 13 通り。

もう 1 点の選び方は、それぞれ 12 通りあるので、 $13 \times 12 = 156$ 通り。

よって、四角形を描くことができない 4 点の選び方は $15 + 300 + 156 = 471$ 通り。

4 点の選び方は全部で ${}_{15}C_4 = 1365$ 通りあるので、求める確率は

$$1 - \frac{471}{1365} = \frac{298}{455}$$

(答) $\frac{298}{455}$

〔Ⅲ〕

(1)

求める a の条件は

$$a+2 > a^2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 2$$

(答) $-1 < a < 2$

(2)

点 P の座標を (p, p^2) とおき、点 Q の座標を (s, t) とおくと、題意より、線分 PQ の中点が点 A となることから、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p+s) = a \\ \frac{1}{2}(p^2+t) = a+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+s = 2a & \cdots \textcircled{1} \\ p^2+t = 2a+4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。①より $p = 2a - s$ なので、これを②に代入すると

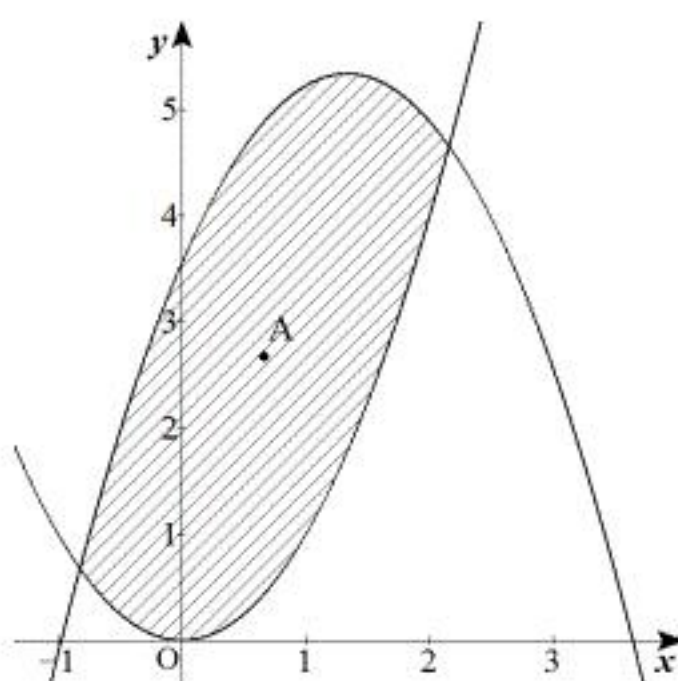
$$(2a-s)^2 + t = 2a+4 \Leftrightarrow t = -(s-2a)^2 + 2a+4$$

よって、点 Q は放物線 $y = -(x-2a)^2 + 2a+4$ 上にある。

また、①式より点 Q は x 座標として実数全体をとるので、点 Q の描く軌跡は放物線になる。

(証明終)

(3)



求める S は、前図斜線部の面積である。2つの放物線の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は

$$\begin{aligned} x^2 &= -(x-2a)^2 + 2a+4 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4ax + 4a^2 - 2a - 4 &= 0 \end{aligned}$$

の2実数解である。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{-4a}{2} = 2a \\ \alpha\beta = \frac{4a^2 - 2a - 4}{2} = 2a^2 - a - 2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 + 4ax - 4a^2 + 2a + 4) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3}(-a^2 + a + 2)^{\frac{3}{2}} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

よって、

$$S^2 = \frac{64}{9}(-a^2 + a + 2)^3$$

(答) $S^2 = \frac{64}{9}(-a^2 + a + 2)^3$

(4)

$-a^2 + a + 2$ が最大になる時、 S は最大になる。

$$-a^2 + a + 2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

と変形できるので、 $-1 < a < 2$ において $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最大になり、求める最大値は

$$S = \frac{8}{3} \left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = 9$$

(答) 9