

〔I〕

(1)	ア	①	イ	⑥	ウ	③
	エ	⑦	オ	①		
(2)	カ	①	キ	①	ク	①
	ケ	⑦	コ	①	サ	⑦
	シ	③	ス	⑦	セ	③
(3)	ソ	①	タ	②	チ	①
(4)	ツ	⑦	テ	①	ト	④
	ナ	⑦	ニ	⑤		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a \{-x(x-a)\} dx \\ &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

である。

(2)

関数 $y = -x(x-a)$ を x で微分すると、

$$y' = -2x + a$$

なので、曲線 C の点 O での接線 T の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (-2 \cdot 0 + a)(x - 0) + 0 \\ &= ax \end{aligned}$$

である。よって、図形 OPQ の面積 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^b [ax - \{-x(x-a)\}] dx \\ &= \int_0^b x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^b \\ &= \frac{1}{3}b^3 \end{aligned}$$

である。

(3)

S_1, S_2 の間に $S_2 = \frac{S_1}{4}$ の関係が成り立つとき、(1), (2)の結果から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}b^3 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}a^3 \\ \Leftrightarrow b^3 &= \frac{1}{8}a^3 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{2}a \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

である。

(4)

S_2 で表された領域を x 軸の回りに回転させてできる回転体の体積は、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^b [(ax)^2 - \{-x(x-a)\}^2] dx \\ &= \pi \int_0^b (-x^4 + 2ax^3) dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}ax^4 \right]_0^b \\ &= \pi \left(-\frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{2}ab^4 \right) \end{aligned}$$

であるが、これに $b = \frac{1}{2}a$ を代入して整理すれば、

$$V_2 = \frac{1}{40} \pi a^5$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)	ア	⑦	イ	⑥	ウ	⑦
	エ	③	オ	⑩	カ	①
	キ	⑦	ク	⑧	ケ	⑩
	コ	⑦	サ	⑥	シ	⑦
	ス	③	セ	⑦	ソ	⑥
	タ	⑦	チ	③		
(2)	ツ	⑦	テ	⑦	ト	⑥
	ナ	⑦	ニ	⑥	ヌ	①
	ネ	③	ノ	⑤	ハ	⑦
	ヒ	①	フ	⑦	ヘ	⑥
	ホ	⑦	マ	④	ミ	⑤
	ム	①	メ	⑥	モ	⑤
	ヤ	②	ユ	⑧	ヨ	⑤
(3)	ラ	⑦	リ	⑥	ル	②
	レ	①	ロ	①	ワ	②

〔解説〕

- (1) 方程式 $z^6 + 12\sqrt{3}z^3 + 216 = 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned} (z^3 + 6\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{3})^2 + 216 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z^3 + 6\sqrt{3})^2 &= -108 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} z^3 + 6\sqrt{3} &= \pm\sqrt{-108} = \pm 6\sqrt{3}i \\ \Leftrightarrow z^3 &= -6\sqrt{3} \pm 6\sqrt{3}i \end{aligned}$$

である。

- (2) $z^3 = -6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}i$ について考える。

$$\sqrt{(-6\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{6}$$

なので、

$$\begin{aligned} z^3 &= -6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}i \\ &= 6\sqrt{6} \left(\frac{-6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}i \right) \\ &= 6\sqrt{6} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= 6\sqrt{6} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

のとき、

$$\begin{aligned} z^2 &= z \times z \\ &= r \times r (\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)) \\ &= r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にして、

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

が成り立つ。よって、 $r > 0$ のとき、これと①とを比較して、

$$\begin{aligned} r^3 &= 6\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、 3θ は小さい順に、

$$3\theta = 135^\circ, 135^\circ + 360^\circ, 135^\circ + 2 \cdot 360^\circ$$

であり、 θ は小さい順に、

$$\theta = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$$

となる。

- (3) $z^3 = -6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}i$ について(2)と同様に考えると、解を、
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, \ 0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$

とおいたとき、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{6} \\ \theta &= 75^\circ, 195^\circ, 315^\circ \end{aligned}$$

である。ゆえに、式(A)の解を r, θ の組として表すと、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{6} \\ \theta &= 45^\circ, 75^\circ, 165^\circ, 195^\circ, 285^\circ, 315^\circ \end{aligned}$$

なので、解は全部で6個である。また、 $r > 0$ なので、 $z = A + Bi$ としたときの A, B の符号は $\cos \theta, \sin \theta$ の正負と一致する。ゆえに、これら6個の θ の正弦、余弦についてそれぞれの正負を調べると次を得る。

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &> 0, \sin 45^\circ > 0 \\ \cos 75^\circ &> 0, \sin 75^\circ > 0 \\ \cos 165^\circ &< 0, \sin 165^\circ > 0 \\ \cos 195^\circ &< 0, \sin 195^\circ < 0 \\ \cos 285^\circ &> 0, \sin 285^\circ < 0 \\ \cos 315^\circ &> 0, \sin 315^\circ < 0 \end{aligned}$$

したがって、 $A \geq 0$ かつ $B \geq 0$ を満たす解は2個、 $A < 0$ かつ $B \geq 0$ を満たす解は1個、 $A < 0$ かつ $B < 0$ を満たす解は1個、 $A \geq 0$ かつ $B < 0$ を満たす解は2個である。

〔Ⅲ〕

(1)	ア	①	イ	③	ウ	②
	エ	①	オ	③	カ	②
(2)	キ	⑩	ク	①	ケ	①
	コ	③	サ	⑦	シ	②
	ス	③	セ	③		
(3)	ソ	①	タ	①	チ	①
	ツ	①	テ	①	ト	①
	ナ	②	ニ	①	ヌ	③
	ネ	②	ノ	①	ハ	⑩
	ヒ	③				
(4)	フ	②				

〔解説〕

(1)

楕円 D の方程式 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ と直線の式 $y=x$ から y を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{3}+x^2&=1 \\ \Leftrightarrow x^2&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

第 1 象限の交点 P の x 座標は正なので、

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。また、 y 座標は、

$$y=x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって、交点 P の座標は、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。

(2)

楕円 D の方程式 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x+2y\frac{dy}{dx}&=0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{3y}\end{aligned}$$

点 P の座標、 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を代入すれば、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$$

となる。よって、これが点 P における楕円 D の接線の傾きであり、接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &=-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

である。

(3)

与式は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{3}}x \\ Y=y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}X \\ y=Y \end{cases}\end{aligned}$$

と変形できる。点 (x,y) が楕円 D 上の点であるので、方程式 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ に $x=\sqrt{3}X$ 、 $y=Y$ を

代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{3}X)^2}{3}+Y^2&=1 \\ \Leftrightarrow X^2+Y^2&=1\end{aligned}$$

となる。これが点 (X,Y) の満たす式である。点 (x,y) が点 P と一致するとき、

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{\sqrt{3}}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2} \\ Y&=y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となり、点 (X,Y) の座標は、

$$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。これは、

$$\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と変形できるので、この点を Q としたとき、直線 OQ と x 軸のなす角は、 $\frac{\pi}{3}$ である。

(4)

方程式 $X^2+Y^2=1$ は円を表す。

【Ⅳ】

(1)	ア	⑩	イ	⑦	ウ	⑩
	エ	②				
(2)	オ	④	⑤	⑥	カ	①
	キ	⑦	ク	⑩	ケ	④
(3)	コ	⑤	⑥		サ	⑩
	シ	①	ス	④	セ	⑩
	ソ	⑩	タ	③	チ	⑩
	ツ	⑥				

〔解説〕

(1)

1回だけサイコロをふって出た目を得点とするとき,1から6の全ての目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で出るので,このときの得点の期待値は,

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

である。

(2)

1回目をふった後で,2回目をふろうとするときに,この2回目の期待値は(1)のときの期待値と同じで

$$\frac{7}{2}=3.5$$

である。そこで,1回目のサイコロの目が4,5,6のときは,2回目はふらないという戦略をとることにする。この戦略をとったときの得点の期待値を,1回目に出たサイコロの目によって場合分けして考える。

[1] 1回目のサイコロの目が1,2,3のいずれかであった場合

この場合,2回目をふることになるので,いずれの場合でも得点の期待値は $\frac{7}{2}$ である。

[2] 1回目のサイコロの目が4,5,6のいずれかであった場合

この場合,2回目はふらず,得点の期待値はそれぞれ4,5,6である。

以上[1],[2]の議論をまとめると,1回目のサイコロの目とそれぞれの場合の得点の期待値の関係は次表のようになる。

1回目のサイコロの目	1	2	3	4	5	6
得点の期待値	$\frac{7}{2}$			4	5	6

よって,求める期待値は,

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{17}{4}$$

である。

(3)

3回までふることができる場合,2回以上サイコロをふるならば,そのときの期待値は1回目の目に依存しない。よって,2回以上サイコロをふる場合の期待値の最大値は(2)より,

$\frac{17}{4}=4.25$ であるから,1回目に5,6が出たときには2回目以降をふらず,2回目をふるならば

2回目以降は(2)と同じ戦略をとる。1回目に5,6が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。1回目に

1,2,3,4のいずれかが出る確率は $\frac{4}{6}$ である。2回目以降をふるときの得点の期待値は $\frac{17}{4}$ と

考えればよいから,求める期待値は,

$$\frac{1}{6}(5+6)+\frac{4}{6}\cdot\frac{17}{4}=\frac{14}{3}$$

である。

(4)

4回までふることができる場合,2回以上サイコロをふるならば,そのときの期待値の最大値は(3)より,

$\frac{14}{3}=4.666\cdots$ だから,1回目に5,6が出たときに2回目以降をふらず,2回目以降を

ふるならば(3)と同じ戦略をとる。このときの期待値は,

$$\frac{1}{6}(5+6)+\frac{4}{6}\cdot\frac{14}{3}=\frac{89}{18}=4.944\cdots$$

である。同様に,5回までふることができる場合,1回目に5,6が出たときに2回目以降をふらず,2回目以降をふるならばこれまでと同じ戦略をとる。このときの期待値は,

$$\frac{1}{6}(5+6)+\frac{4}{6}\cdot\frac{89}{18}=\frac{277}{54}=5.129\cdots$$

である。同様に,6回までふることができる場合,1回目に6が出たときに2回目以降をふらないという戦略をとる。ここで, n 回までふることができるという条件下での最大の期待値を a_n とすると,

$$\begin{aligned}a_6&=\frac{1}{6}\cdot6+\frac{5}{6}a_5\\&=1+\frac{5}{6}a_5\end{aligned}$$

である。 a_6,a_5 の差を考えると,

$$a_6-a_5=1-\frac{1}{6}a_5$$

である。サイコロの目は1から6までなので,全ての自然数 n について $a_n<6$ である。

よって,

$$a_6-a_5>0\Leftrightarrow a_6>a_5$$

であり,同様に全ての $n(>6)$ について,

$$a_{n+1}>a_n$$

が成り立つ。よって,

$$a_n>a_{n-1}>\cdots>a_5>5\quad(n=6,7,8,\cdots)$$

となり,サイコロをあと6回以上ふれるときに6が出れば打ち切ってよい。

つまり, $n\geq 6$ ならば,

$$f(n)=6\quad(\text{一定})$$

となる。