2010年度入学試験問題　214

理工学部A方式Ⅱ日程・生命科学部A方式Ⅱ日程
デザイン工学部A方式Ⅱ日程

2　限　数　　学　(90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっている。問題に指示されている通りに解答すること。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としないので注意すること。
4. 問題文は4ページから17ページまでとなっている。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1) 解答上の注意

問題中の ア，イ，ウ，… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または0～9までの数が1つずつ入る。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続く。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開かないこと。

◇M21(528—578)

〔I〕

1から5までの5個の整数のすべてを1つずつ並べた順列を $a_1a_2a_3a_4a_5$ で表し，$i=1$，2，…，5に対して，$S_i=\sum_{k=1}^{i} a_k$ とする。

(1) この順列の総数は $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

(2) $S_5=$ $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(3) S_4 が偶数である順列の個数は $\boxed{\text{カキ}}$ であり，S_2 と S_4 がともに偶数である順列の個数は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

(4) $S_1\times S_2\times S_3$ が偶数である順列の個数は $\boxed{\text{コサシ}}$ である。

(5) $\sum_{i=1}^{5} S_i$ が偶数である順列の個数は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

（計　算　用　紙）

〔Ⅱ〕

直線$y=-x+10$をℓとする。行列Aで表される移動fにより，ℓ上の点(x, y)がℓ上の点(x', y')に移されるとする。$x'=\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}y$であるとき，

$$A=\frac{1}{8\boxed{\text{ア}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}}\\ \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}}\end{pmatrix}$$

となる。kを定数として，座標平面上の原点とは異なる点(p, q)がfにより点(kp, kq)に移されるとする。このとき，kの値は$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$または$\boxed{\text{ケ}}$となる。ここで，$k=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$のとき$p=1$とすると$q=\boxed{\text{コサ}}$であり，$k=\boxed{\text{ケ}}$のとき$q=5$とすると$p=\boxed{\text{シ}}$である。行列$B$を

$$B=\begin{pmatrix}1 & \boxed{\text{シ}}\\ \boxed{\text{コサ}} & 5\end{pmatrix}$$

とおくと

$$B^{-1}AB=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{スセ}} & \boxed{\text{ソ}}\\ \boxed{\text{タ}} & \boxed{\text{チ}}\end{pmatrix}$$

となる。

（計　算　用　紙）

〔Ⅲ〕

曲線 $y=x^2$ を C とする。t を正の数とし，C 上の2点 $\mathrm{P}(t, t^2)$，$\mathrm{Q}(2t, 4t^2)$ における C の接線をそれぞれ ℓ，m とする。

(1) m の方程式は，$y=\boxed{ア}\,tx-\boxed{イ}\,t^2$ である。

(2) ℓ と m がなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\tan\theta=\dfrac{\boxed{ウ}\,t}{\boxed{エ}+\boxed{オ}\,t^2}$ であり，θ が最大になる t の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である。

(3) ℓ と m の交点は，$y=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}x^2$ が表す曲線 K の上にある。K と x 軸，および直線 $x=\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サシス}}$ である。

（計　算　用　紙）

〔Ⅳ〕

原点をOとするxyz空間において，2点A$(6, 0, 0)$，E$(-3, 3\sqrt{3}, 0)$をとる。xy平面上にOAとOEを2辺とする正六角形OABCDEを作る。次に，$u>0$として点H(s, t, u)をとり，OEとOHを2辺とする正五角形OEFGH，およびOAとOHを2辺とする正六角形OAPQRHを作る。ただし，正多角形の頂点は隣り合う順とする。また，必要ならば$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$を用いてもよい。

(1) $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OH}$のなす角は$\boxed{アイウ}$°であり，$\overrightarrow{OE}$と$\overrightarrow{OH}$のなす角は$\boxed{エオカ}$°である。

(2) 点Hの座標を求めると，$s = \boxed{キク}$，$t = \boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コサ}}$，$u = \boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}$である。

(3) $\overrightarrow{OD}$と$\overrightarrow{OR}$のなす角をθとするとき，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$である。

（計　算　用　紙）

次の問題〔V〕は，生命科学部生命機能学科植物医科学専修を志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

θ を定数とし，

$$f(x) = \{\cos(x+\theta) + \sqrt{3}\sin(x+\theta)\}\{\sqrt{3}\cos(x+\theta) - \sin(x+\theta)\}$$

とする。

(1) $f(x) = a\sin(rx + s\theta + t)$ と表すと，$a =$ $\boxed{ア}$，$r =$ $\boxed{イ}$，$s =$ $\boxed{ウ}$，$t =$ $\boxed{エ}$ である。

ただし，$\boxed{エ}$ については，以下の ⓪〜⑨ から 1 つを選べ。

⓪ 0　① $\frac{\pi}{12}$　② $\frac{\pi}{6}$　③ $\frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{3}$

⑤ $\frac{5}{12}\pi$　⑥ $\frac{\pi}{2}$　⑦ $\frac{2}{3}\pi$　⑧ $\frac{3}{4}\pi$　⑨ $\frac{5}{6}\pi$

（〔V〕の問題は次ページに続く。）

(2)　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$とする。すべての$x$に対して，$f(-x)=f(x)$が成り立つのは，$\theta=$ $\boxed{\text{オ}}$ のときである。

ただし，$\boxed{\text{オ}}$ については，12 ページの ⓪～⑨ から 1 つを選べ。

(3)　$\theta=$ $\boxed{\text{オ}}$ とする。$0 \leqq x < \pi$のとき$f(x)=1$になるxの値は，小さい方から順に，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，12 ページの ⓪～⑨ からそれぞれ 1 つを選べ。

次の問題〔Ⅵ〕は，理工学部電気電子工学科・経営システム工学科，生命科学部環境応用化学科，デザイン工学部建築学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅵ〕

n を自然数とし，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 x^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,\ \ b_n = \int_0^1 x^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

で定める。ただし，$x^0 = 1$ とする。このとき，$a_1 =$ $\boxed{ア}$，$b_1 =$ $\boxed{イ}$，$a_2 =$ $\boxed{ウ}$，$b_2 =$ $\boxed{エ}$ である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ については，以下のA群の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。

A　群

⓪ $\frac{\pi}{4}$　① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{2}{\pi}$

④ $\frac{4}{\pi}$　⑤ $\frac{\pi^2}{4}$　⑥ $\frac{4}{\pi^2}$　⑦ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$

⑧ $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$　⑨ $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}$

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

次に，a_{n+1} は b_n を用いて表すと $\boxed{オ}$ となり，b_{n+1} は a_n を用いて表すと $\boxed{カ}$ となる。

ただし，$\boxed{オ}$，$\boxed{カ}$ については，以下のB群の㊀～⑨からそれぞれ1つを選べ。

B　群

㊀ $a_{n+1}=b_n$

⓪ $a_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}b_n$

① $a_{n+1}=nb_n$

② $a_{n+1}=\dfrac{2n}{\pi}b_n$

③ $a_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{2n}{\pi}b_n$

④ $b_{n+1}=-\dfrac{2n}{\pi}a_n$

⑤ $b_{n+1}=a_n$

⑥ $b_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}a_n$

⑦ $b_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{2n}{\pi}a_n$

⑧ $b_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2n}a_n$

⑨ $b_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{2n}a_n$

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

一方，$0 \leqq x \leqq 1$ において $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ の最小値は $\boxed{キ}$，最大値は $\boxed{ク}$ であることから

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \boxed{ケ}$$

となる。同様に

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \boxed{コ}$$

となる。

さらに，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の関係から

$$\lim_{n \to \infty} na_n = \boxed{サ}, \quad \lim_{n \to \infty} nb_n = \boxed{シ}$$

である。

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

ここで，

$$\lim_{n \to \infty} n^2 b_n = \boxed{\text{ス}}$$

であるから

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) b_n = \boxed{\text{セ}}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)a_n}{(n+1)^2 b_n} = \boxed{\text{ソ}}$$

である。

ただし，$\boxed{\text{ス}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ については，14ページのA群の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。

（以　上）

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HBの黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしないこと。

② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしないこと。

④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしないこと。

⑤ アの解答を3にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例

ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

悪いマークの例

ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	枠外にはみ出してマークしないこと。
ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	枠全体をマークするようにしなさい。
ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	○でかこんでマークしないこと。
ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	×を書いてマークしないこと。