〔Ⅰ〕

(1)

2次方程式$(*)$が正と負の実数解をもつための条件は，$f(x)=x^2-x-k$ とおくと，xy 平面上で下に凸な放物線 $y=f(x)$ のグラフの概形を考えることによって，

$$f(0)<0$$

であることがわかるが，これは

$$f(0)=-k<0\ (\because k>0)$$

より成立するから，題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)で定めた $f(x)$ に $x=-k$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f(-k)&=(-k)^2-(-k)-k\\ &=k^2\\ &>0\ (\because k>0) \end{aligned}$$

となり，(1)における考察より $f(0)<0$ であるから，(1)と同様にして xy 平面上で下に凸な放物線 $y=f(x)$ のグラフの概形を考えることによって，2次方程式$(*)$の負の実数解 α に関して，不等式

$$-k<\alpha<0$$

が成立することがわかる。

(証明終)

(3)

α, β は2次方程式$(*)$の解であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\beta=-k \end{cases}$$

が成立するから，この2式を利用することで，

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &=1+4k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^3-\alpha^3&=(\beta-\alpha)\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)\\ &=\sqrt{1+4k}\left\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right\}\ (\because \beta-\alpha>0)\\ &=\sqrt{1+4k}(1+k) \end{aligned}$$

となるから，

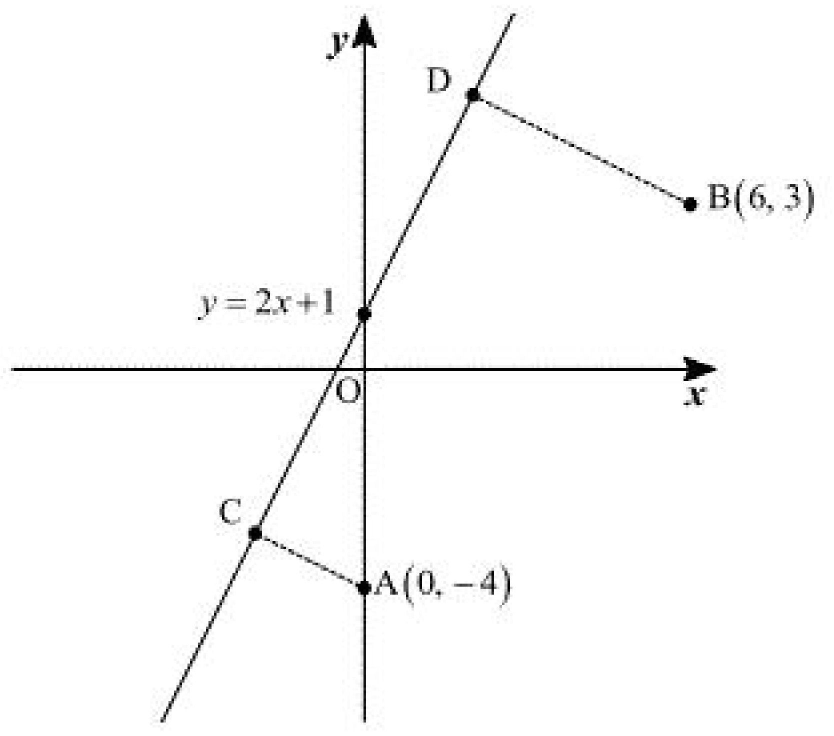
$$\begin{aligned} &(\beta-\alpha)^2=\beta^3-\alpha^3\\ &\Leftrightarrow 1+4k=\sqrt{1+4k}(1+k)\\ &\Leftrightarrow 1+4k=(1+k)^2\ \left(\because \sqrt{1+4k}>0\right)\\ &\Leftrightarrow k^2-2k=0\\ &\therefore k=2\ (\because k>0) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $k=2$

〔Ⅱ〕

(1)



まず，点C, Dの座標を求める。直線$y=2x+1$の傾きは2であるから，直線AC, BDの傾きは$-\frac{1}{2}$であるため，各直線の式は

$$y=-\frac{1}{2}x-4,\ y=-\frac{1}{2}(x-6)+3$$

となる。よって，各式を$y=2x+1$と連立することで，

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-\frac{1}{2}x-4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y)=(-2,\ -3)$$

$$\therefore \mathrm{C}(-2,\ -3)$$

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-\frac{1}{2}(x-6)+3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y)=(2,\ 5)$$

$$\therefore \mathrm{D}(2,\ 5)$$

と各点の座標が求まる。

次に点Eの座標を求める。点Eは線分CD上にあるから，その座標は$\mathrm{E}(t,\ 2t+1)\ (-2 \leqq t \leqq 2)$とおける。ここで，題意より$\angle\mathrm{ECA}=90°$であるから，正弦の定義と$\sin\angle\mathrm{AEC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$より，

$$\sin\angle\mathrm{AEC}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{AE}=\sqrt{5}\mathrm{AC} \qquad ・・・①$$

となり，さらに点と直線の距離の式より，

$$\mathrm{AC}=\frac{|2\cdot 0+(-1)\cdot(-4)+1|}{\sqrt{2^2+1}}$$

$$=\sqrt{5}$$

であるから，①より，

$$\mathrm{AE}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5 \qquad ・・・②$$

となる。一方，

$$\mathrm{AE}=\sqrt{t^2+\{(2t+1)-(-4)\}^2}$$

$$=\sqrt{5t^2+20t+25}$$

と表せるから，

$$\sqrt{5t^2+20t+25}=5$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+20t+25=25$$

$$\Leftrightarrow t^2+4t=0$$

$$\therefore t=0 \quad (\because -2 \leqq t \leqq 2)$$

となるため，点Eの座標は$(0,\ 1)$となる。したがって，

$$\mathrm{BE}=\sqrt{(6-0)^2+(3-1)^2}$$

$$=2\sqrt{10}$$

となるから，②と合わせて，AE, BEの長さは

$$\mathrm{AE}=5,\ \mathrm{BE}=2\sqrt{10}$$

と求まる。

(答) $\mathrm{AE}=5,\ \mathrm{BE}=2\sqrt{10}$

(2)

(1)と同様にして，点Eの座標を$\mathrm{E}(t,\ 2t+1)\ (-2 \leqq t \leqq 2)$とおくと，三平方の定理より，

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{BE}^2=\mathrm{AB}^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{(t-0)^2+(2t+1-(-4))^2\right\}+\left\{(t-6)^2+(2t+1-3)^2\right\}=(6-0)^2+(3-(-4))^2$$

$$\Leftrightarrow t^2=2$$

$$\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$$

となる。また，$t=\pm\sqrt{2}$は$-2 \leqq t \leqq 2$を満たすから，点Eが線分CD上にある条件を満たす。したがって，求める点Eの座標は

$$\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+1\right),\ \left(-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}+1\right)$$

である。

(答) $\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+1\right),\ \left(-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}+1\right)$

(3)

$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{BED}$となるとき，直線$y=2x+1$に対してAと対称な点A′をとると，

$$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{BED}$$

$$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{A'EC}$$

$$\therefore \angle\mathrm{BED}=\angle\mathrm{A'EC}$$

より，3点A′, E, Dは同一直線上に存在することがわかる。したがって，まず点A′の座標を求め，直線$y=2x+1$と直線A′Bの交点として点Eの座標を求めればよいことになる。

(1)より，点Cの座標は$(-2,\ -3)$であり，ここで点A′の座標を$(a,\ b)$とおくと，点Cは線分AA′の中点となることから，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+0)=-2 \\ \frac{1}{2}(b-4)=-3 \end{cases}$$

$$\therefore (a,\ b)=(-4,\ -2)$$

と求まる。よって，直線A′Bの式は，

$$y=\frac{3-(-2)}{6-(-4)}(x-6)+3$$

$$=\frac{1}{2}x$$

となることから，この直線と直線$y=2x+1$の交点を求めることで，点Eの座標は，

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,\ y)=\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \mathrm{E}\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

と求まる。

(答) $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

〔Ⅲ〕

(1)

2 回のじゃんけんを行ったとき，0 以上の整数 $x,\ y,\ z$ に対して

甲が勝った回数を x 回

乙が勝った回数を y 回

あいこになった回数を z 回

とおくと，点 P の座標が 1 となるのは

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)$$

のときであるから，(i)の移動が 1 回，(ii)の移動が 0 回，(iii)の移動が 1 回行われるときの確率を求めればよい。また，1 回の移動で(i) (ii) (iii)の移動が行われる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ であるから，

求める確率は，

$$_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

となる。

(答) $\dfrac{2}{9}$

(2)

(1)と同じように $x,\ y,\ z$ を定めると，4 回のじゃんけんを行ったとき，点 P が原点にあるのは

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=0 \end{cases} \qquad ・・・①$$

を満たすときである。①を解くと，

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x=y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=4 \\ x=y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4),\ (1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 0)$$

となるから，(1)と同様に考えると，求める確率は

$$_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_2\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{81}$$

となる。

(答) $\dfrac{19}{81}$

(3)

余事象を考えることにする。(1)と同じように $x,\ y,\ z$ を定めると，6 回のじゃんけんを行ったとき，点 P の原点からの距離が 4 以上となるのは，

$$\begin{cases} x+y+z=6 & ・・・② \\ |x-y|\geqq 4 & ・・・③ \end{cases}$$

を満たすときである。ここで，②を満たす条件のもとで③を変形すると，

$$x=y\pm 4,\ y\pm 5,\ y\pm 6$$

となるから，これらを②に代入することで，

$$\begin{cases} 2y+z=2 \\ x=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(4,\ 0,\ 2),\ (5,\ 1,\ 0)$$

$$\begin{cases} 2x+z=2 \\ x=y-4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 5,\ 0)$$

$$\begin{cases} 2y+z=1 \\ x=y+5 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 1)$$

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(0,\ 5,\ 1)$$

$$\begin{cases} 2y+z=0 \\ x=y+6 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(6,\ 0,\ 0)$$

$$\begin{cases} 2x+z=0 \\ x=y-6 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)=(0,\ 6,\ 0)$$

となる。したがって，余事象の確率は

$$2\left\{{}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot{}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+{}_6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}=\frac{56}{729}$$

となるから，求める確率は

$$1-\frac{56}{729}=\frac{673}{729}$$

である。

(答) $\dfrac{673}{729}$