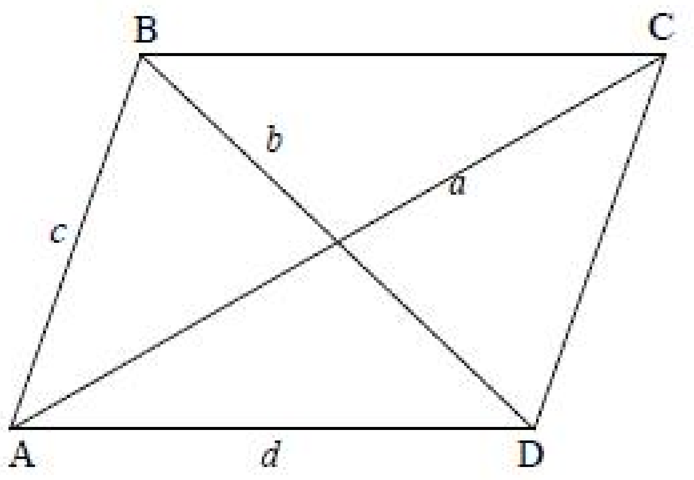
〔 I 〕

(1)



△ABD について余弦定理を用いて

$$c^2+d^2-2cd\cos\angle\mathrm{BAD}=3^2$$

$$\therefore c^2+d^2-\frac{2}{3}cd=9 \qquad \cdots①$$

である。また，△ACD について余弦定理を用いて

$$c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\angle\mathrm{BAD})=\left(\sqrt{17}\right)^2$$

$$\therefore c^2+d^2+\frac{2}{3}cd=17 \qquad \cdots②$$

である。②から①を辺々引いて

$$\frac{4}{3}cd=8$$

$$\therefore d=\frac{6}{c}$$

である。これを①に代入して

$$c^2+\frac{36}{c^2}-4=9$$

$$\Leftrightarrow c^4-13c^2+36=0$$

$$\Leftrightarrow \left(c^2-4\right)\left(c^2-9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow c^2=4,\ 9$$

$$\therefore c=2,\ 3$$

となる。よって，

$$(c,\ d)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

であるが，$c<d$ なので求める $(c,\ d)$ は

$$(c,\ d)=(2,\ 3)$$

である。

(答) $(c,\ d)=(2,\ 3)$

(2)

(1)と同様に，△ABD と△ACD について余弦定理を用いて

$$c^2+d^2-2cd\cos\angle\mathrm{BAD}=b^2$$

$$\therefore c^2+d^2-\frac{2}{3}cd=b^2, \qquad \cdots③$$

$$c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\angle\mathrm{BAD})=a^2$$

$$\therefore c^2+d^2+\frac{2}{3}cd=a^2 \qquad \cdots④$$

となる。④から③を辺々引くと

$$\frac{4}{3}cd=a^2-b^2$$

となる。これと $a^2+b^2=36$ より，

$$\frac{4}{3}cd=2a^2-36$$

$$\therefore cd=\frac{3}{2}\left(a^2-18\right)$$

となる。ここで，平行四辺形 ABCD の面積を S とおくと

$$S=cd\sin\angle\mathrm{BAD}$$

$$=cd\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}cd$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(a^2-18\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(a^2-18\right)$$

である。今，S の最大値を求めたいので，a^2 の取りうる値の範囲を求めればよい。③と④を辺々加えると

$$2\left(c^2+d^2\right)=a^2+b^2=36$$

$$\therefore c^2+d^2=18$$

なので

$$c+d=\sqrt{(c+d)^2}$$

$$=\sqrt{c^2+d^2+2cd}$$

$$=\sqrt{18+3\left(a^2-18\right)}$$

$$=\sqrt{3a^2-36}$$

である。これと $cd=\frac{3}{2}\left(a^2-18\right)$ より解と係数の関係から，c と d は 2 次方程式

$$x^2-\sqrt{3a^2-36}\,x+\frac{3}{2}\left(a^2-18\right)=0$$

の 2 解である。c と d は共に正の実数だから，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D\geqq 0 \Leftrightarrow 3a^2-36-6\left(a^2-18\right)\geqq 0$$

$$2\text{ 解の和}>0 \Leftrightarrow \sqrt{3a^2-36}>0$$

$$2\text{ 解の積}>0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(a^2-18\right)>0$$

となる。これを整理すると $18<a^2\leqq 24$ となる。従って $S=\sqrt{2}\left(a^2-18\right)$ の最大値は

$$S=\sqrt{2}\,(24-18)$$

$$=6\sqrt{2}$$

である。

(答) $6\sqrt{2}$

〔Ⅱ〕

(1)

$$f(x)=x^2+2(a+b)x+2ab+4a-2b+4$$

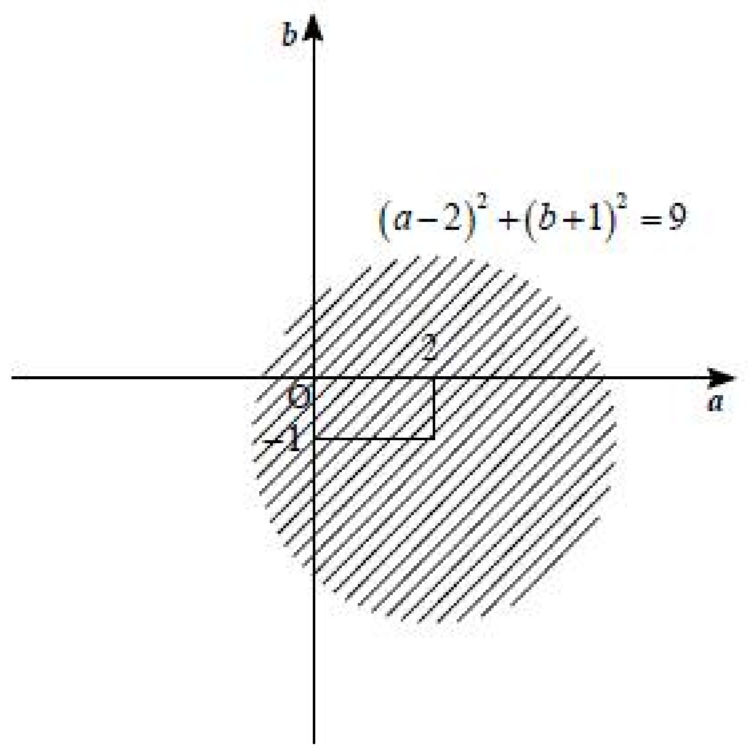
とおく。放物線 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であるので、全ての実数 x に対し $f(x)>0$ となるには，$f(x)$ の最小値が 0 より大きければよい。ここで，

$$f(x)=x^2+2(a+b)x+2ab+4a-2b+4$$
$$=\{x+a+b\}^2-(a^2-4a-4+b^2+2b)$$

なので $f(x)$ の最小値は $f(-a-b)=-a^2+4a+4-b^2-2b$ である。したがって，求める条件は

$$-a^2+4a+4-b^2-2b>0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2<9$$

である。この条件が表す領域は下図の斜線部分である。ただし，境界線上の点は除く。



(答) $(a-2)^2+(b+1)^2<9$，前図

(2)

$y=f(x)$ の頂点の座標は

$$(p,\ q)=(-a-b,\ -a^2+4a+4-b^2-2b)$$

である。よって，

$$q \geqq 2|p|+4$$
$$\Leftrightarrow -a^2-b^2+4a-2b \geqq 2|a+b| \qquad \cdots ①$$

となる。

[1] $a+b \geqq 0$ のとき

①より

$$-a^2-b^2+4a-2b \geqq 2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2 \leqq 5$$

となる。

[2] $a+b<0$ のとき

①より

$$-a^2-b^2+4a-2b \leqq -2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow (a-3)^2+b^2 \leqq 9$$

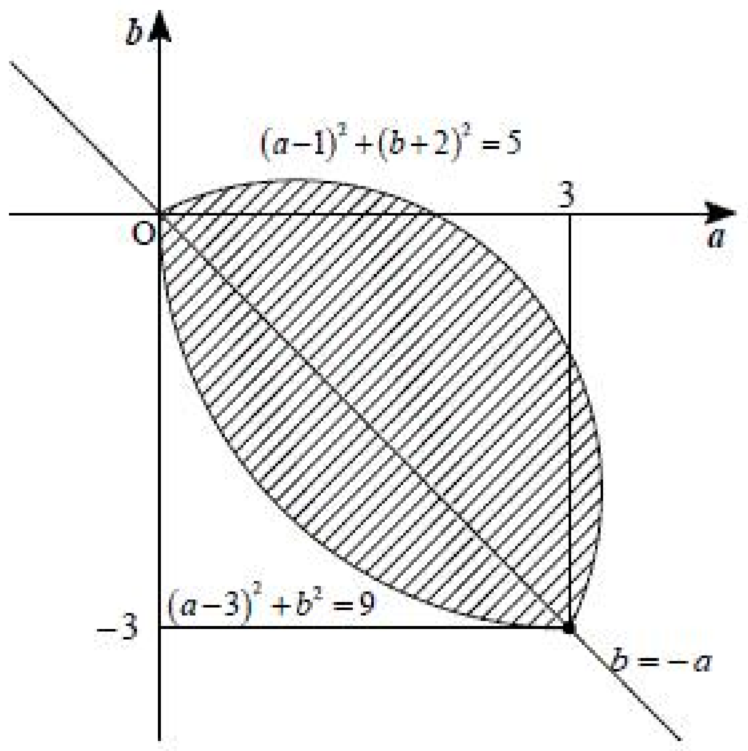
となる。

以上より、求める条件は

$a+b \geqq 0$ のとき，$(a-1)^2+(b+2)^2 \leqq 5$

$a+b<0$ のとき，$(a-3)^2+b^2 \leqq 9$

である。従って，求める領域を図示すると下図のようになる。ただし，境界線上の点を含む。



(答) a, b に関する条件：$a+b \geqq 0$ のとき，$(a-1)^2+(b+2)^2 \leqq 5$ ／ $a+b<0$ のとき，$(a-3)^2+b^2 \leqq 9$

表す領域：前図

〔文学部Ⅲ〕

1 から 6 の球をそれぞれ①～⑥と表すことにする。

(1)

a, b, c の中に 2 と等しくなるものがない

$\Leftrightarrow$ A, B, C のいずれかの箱に①②が入る

である。

①②が入る箱の選び方は 3 通り，

残りの球の入れ方は ${}_4C_2 = 6$ 通り

であるから，求める場合の数は $3 \cdot 6 = 18$ 通りとなる。

(答) 18 通り

(2)

a, b, c の中に 3 と等しくなるものがある

$\Leftrightarrow$ A, B, C のいずれかの箱に③④，③⑤，③⑥のどれかが入っている

である。

③が入る箱の選び方は 3 通り，

③④，③⑤，③⑥のうち，どの組合せを選ぶかが 3 通り，

残りの球の入れ方が ${}_4C_2 = 6$ 通り

であるから，求める場合の数は $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ 通りとなる。

(答) 54 通り

(3)

a, b, c の中で最大の数が 3 になる

$\Leftrightarrow$①，②，③がそれぞれ異なる箱に入る

である。

①，②，③の入れ方は $3! = 6$ 通り

残りの球の入れ方は $3! = 6$ 通り

であるから，求める場合の数は $6 \cdot 6 = 36$ 通りとなる。

(答) 36 通り

〔経済学部Ⅲ〕および〔人間環境学部Ⅲ〕

(1)

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2a^3$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

である。$a > 0$ より，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

従って $f(x)$ は極小値をもつことがわかる。

（証明終）

(2)

条件より，放物線 C の方程式は

$$C : y = b(x - p)^2 + f(p)$$

とおける。ただし，b は 0 でない実数である。ここで(1)より

$p = 2a,\ f(p) = f(2a) = -2a^3$

であるから，

$$C : y = b(x - 2a)^2 - 2a^3$$

である。これが原点を通るから

$$0 = b(-2a)^2 - 2a^3$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 b = 2a^3$$
$$\therefore b = \frac{1}{2}a \qquad (\because a \neq 0)$$

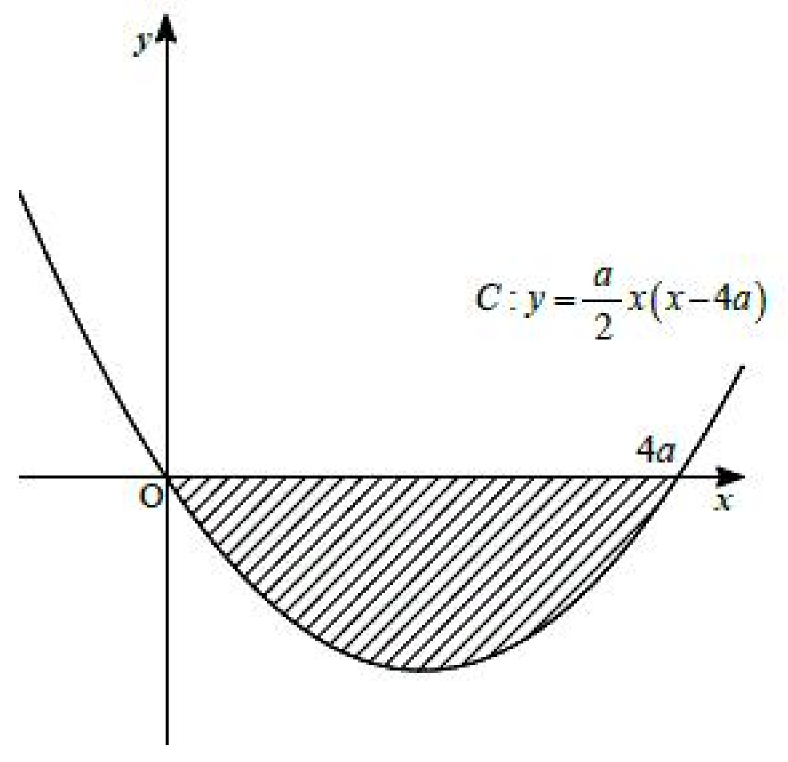
となる。従って

$$C : y = \frac{a}{2}(x - 2a)^2 - 2a^3$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{2}x^2 - 2a^2 x$$

である。

(答) $y = \frac{a}{2}x^2 - 2a^2 x$

(3)



C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S = \int_0^{4a} \left\{ -\frac{a}{2}x(x - 4a) \right\} dx = -\frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot (4a)^3 = \frac{16}{3}a^4$$

となる。$S = 3$ より

$$\frac{16}{3}a^4 = 3$$
$$\Leftrightarrow a^4 = \frac{9}{16}$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4} \qquad (\because a^2 > 0)$$
$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\because a > 0)$$

となる。

(答) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$